UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

62. BAND, 3. HEFT
MIT 2 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM JULI 1958

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1958

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 76 71 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

62. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Funk, P., Nachruf auf Prof. Johann Radon 189

Unkelbach, H., Über Ecken mit imaginären Winkeln und ihre konforme Abbildung 200

Zeidl, B., Über 4- und 5-chrome Graphen 212

Fan, Ky, Topological Proofs for Certain Theorems on Matrices with Non-Negative Elements 219

Householder, A. S., On Matrices with Non-Negative Elements 238

Bambah, R. P., Some Transference Theorems in the Geometry of Numbers 243

Schmidt, W., Mittelwerte über Gitter II 250

Buchbesprechungen 259

Nachruf auf Prof. Johann Radon

Von

Paul Funk, Wien

(*Eingegangen am 2. Dezember 1957*)

Am 25. Mai 1956 starb Professor Dr. *Johann Radon* als Prorektor der Wiener Universität. Mit ihm schied aus unserer Mitte nicht nur

Dr. J. Radon

ein in der ganzen Welt hochangesehener Mathematiker, sondern wir mußten auch Abschied nehmen von einer Persönlichkeit, die in aller

Stille, ohne dies selbst anzustreben, in akademischen Kreisen eine führende Stellung einnahm. Er gehörte seit 1939 als korrespondierendes, seit 1947 als wirkliches Mitglied und seit 1953 als Sekretär der naturwissenschaftlichen Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften an. Seine mathematische Ausbildung genoß er an der Wiener Universität. Nach seinem Doktorat wurde ihm ein Stipendium zuteil, das es ihm ermöglichte, sein Studium ein Semester lang in Göttingen fortzusetzen. Bald darnach wurde er Assistent an der Technischen Hochschule in Brünn. Während des ersten Weltkrieges war *Radon* wegen starker Kurzsichtigkeit vom Militärdienst enthoben und während dieser Zeit Assistent an der Technischen Hochschule in Wien. Seine Habilitation erfolgte bereits im Jahre 1913 auf Grund der bekannten Arbeit: Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktion [4]. 1919 erfolgte seine Ernennung als a.o. Professor an die Universität Hamburg. Nun folgten in kurzem zeitlichen Abstand Berufungen als Ordinarius an die Universitäten Greifswald, Erlangen und Breslau. In Greifswald wirkte er von 1922 bis 1925, in Erlangen von 1925 bis 1928 und schließlich von 1928 bis 1945 in Breslau. Durch die Kriegsereignisse war er 1945 gezwungen, ohne Hab und Gut zu flüchten und fand zunächst Aufnahme an der Universität Innsbruck und wurde zwei Jahre später an die Wiener Universität berufen. Inzwischen erhielt er Berufungen nach Greifswald, Erlangen, Jena und Leipzig, die er aber ablehnte.

Bevor wir darauf eingehen, *Radons* wissenschaftlichen Werdegang näher zu betrachten und sein mathematisches Schaffen zu würdigen, wollen wir zunächst den äußeren Rahmen schildern, in dem sein Leben ablief. Da nach Beendigung seiner Studienzeit äußere Lebensumstände bei *Radon* im Verhältnis zu den in ihm selbst wurzelnden Kräften von geringer Bedeutung für seine wissenschaftlichen Leistungen waren, tun wir dies in aller Kürze. Geboren wurde *Radon* am 16. Dezember 1887 in Tetschen an der Elbe. Sein Vater war Sudetendeutscher, seine Mutter stammte aus Thüringen. Seine Gymnasialzeit verbrachte er in Leitmeritz, das im alten Österreich als Schulstadt ein gewisses Ansehen genoß. In einer kleinen, autobiographischen Skizze, die *Radon* anläßlich seiner Aufnahme der Wiener Akademie übergab, gedenkt *Radon* selbst der vielen Anregungen, die ihm tüchtige Lehrer auf den Lebensweg mitgaben. Seine Interessen galten nicht nur der Mathematik und den Naturwissenschaften, sondern auch dem Studium der alten Sprachen. Seine doppelte Art von mathematischer Begabung, die schon zu Beginn seiner Studienzeit deutlich in Erscheinung getreten sein dürfte, kommt durchaus nicht

häufig vereint vor, selbst bei den bedeutendsten Mathematikern nicht. Einerseits abstraktes Denken, wie es die Schaffung einer umfassenden Theorie verlangt, andererseits eine große, durch geometrische Anschauung unterstützte Anpassungsgabe, die zur Behandlung spezieller Probleme nötig ist. Wir müssen hier auch den großen Ernst, der seiner ganzen Lebensauffassung offenbar von früher Jugend an zugrunde lag, hervorheben. „Begabung verpflichtet" war für ihn bestimmend. Aber wir freuen uns sagen zu können, daß ihm dieser Zug seines Wesens nicht nur sehr bald volle Anerkennung, sondern auch viel aufrichtig freundschaftliche Gesinnung zu sichern vermochte. Während *Radons* Studienzeit wirkten an der Wiener Universität *Mertens*, *von Escherich*, *Wirtinger* und *Kohn* als Professoren und als Dozenten *Plemelj* und *Hahn*. Es muß auch hervorgehoben werden, daß ihn in dieser Zeit eine herzliche Freundschaft mit dem so überaus genialen aber früh verstorbenen Mathematiker *Wilhelm Gross* verband. *Radon* selbst hob oft hervor, insbesondere in seiner Antrittsrede bei der Übernahme seiner Wiener Lehrkanzel, daß *von Escherich* auf seinen Werdegang den allergrößten Einfluß ausgeübt hat. Der große Fortschritt, der sich in der Grundlegung der Analysis in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch *Weierstraß* und *Georg Cantor* angebahnt hatte, war für *Escherich* eine Quelle der Begeisterung und er sah es als seine Pflicht an, den jungen Studenten gleich von Anfang an die Grundlagen der Analysis in Weierstraßscher Prägung zu vermitteln. Dies stand im Gegensatz zu einem großen Teil der damals gebräuchlichen Lehrbuchliteratur. Für *Escherich*, der, wie er selbst tief bedauerte, *Weierstraß* nicht persönlich kennen gelernt hatte, war die Form der neuen Ideen, wie sie in den Lehrbüchern von *Stolz* zum Ausdruck kamen, richtunggebend. Der Verzicht auf Anschaulichkeit und auf anziehende Beispiele in seinen Vorlesungen, sowie häufige und bis ins einzelne durchgeführte Beweisgänge gleicher Art, wirkten allerdings dahin, daß *Escherich* nur auf wirklich tiefer veranlagte Studenten einen bedeutenden Einfluß ausüben konnte. *Escherichs* Forschertätigkeit galt vor allem anderen der genauen Durchführung der in ihren Grundzügen bereits von *Clebsch* entworfenen Theorie der zweiten Variation beim allgemeinen Lagrangeschen Problem. Obwohl *Escherichs* Arbeiten auf diesem Gebiet von grundlegender Bedeutung waren und auch in der Literatur volle Anerkennung fanden, gelang es ihm doch nicht, eine gewisse Schwierigkeit, die sich hier bot, zu beseitigen. Erst ungefähr 25 Jahre später wurde sie von seinem Schüler *Radon* überwunden.

Bei dem großen Umfang von *Radons* Arbeiten erscheint es geboten,

nicht jede wertvolle Einzelarbeit zu besprechen, sondern das Hauptaugenmerk auf jene Arbeiten zu richten, bei denen seine Eigenart am klarsten hervortritt. Als Ergänzung sei auf das beigefügte Verzeichnis seiner Arbeiten hingewiesen. *Radons* eigenes Schaffen galt hauptsächlich der Variationsrechnung, Problemen der Differentialgeometrie und insbesondere den absolut additiven Mengenfunktionen und ihrer Anwendung auf Funktionalanalysis. Dazu kommen noch einige kleinere Arbeiten.

Sprechen wir zunächst von *Radons* Arbeiten über Variationsrechnung. Seine Dissertation [1]: „Über das Minimum des Integrals $\int_{s_0}^{s_1} F(x, y, \vartheta, \varkappa)\, ds$" läßt bereits Vollreife und klares Erfassen dessen, was prinzipiell von Interesse ist, erkennen. Ein Hauptergebnis ist: Treten höhere Ableitungen im Integranden auf, so tritt bei der Frage nach den hinreichenden Bedingungen für ein halbstarkes Minimum dieselbe Erscheinung ein wie beim inhomogenen Variationsproblem für ein starkes Minimum, wenn nur die erste Ableitung im Integranden vorhanden ist. Auch wenn die E-Funktion längs der Extremale beständig positiv ist, so genügt dies noch nicht, um ihren positiven Charakter für das Feld in der Umgebung der Extremalen zu behaupten. Als bedeutsamste Arbeit *Radons* auf dem Gebiet der Variationsrechnung scheint uns wohl die unter [26] genannte Arbeit. Hier wurden die oben erwähnten Schwierigkeiten, auf die *Escherich* gestoßen war, überwunden. Das entscheidende war dabei ein Beweis für das isolierte Vorkommen einer Nullstelle einer gewissen Determinante. In dieser Arbeit tritt besonders markant hervor, daß es *Radon* stets in ausgezeichneter Weise verstand, den formalen Apparat der Zielsetzung anzupassen. In diesem Falle war es eine meisterhafte Anwendung des Matrizenkalküls, die es ermöglichte, das gewünschte Ziel durch Formeln in übersichtlicher Art zu erreichen. Für die damalige Zeit konnte diese Arbeit als ein bedeutender Fortschritt gewertet werden. Dies wurde insbesondere auch sofort von *W. Blaschke* anerkannt. Um die geleistete Arbeit vor einem größeren Kreis von Mathematikern deutlich in Erscheinung treten zu lassen, lud *Blaschke Radon* ein, Vorträge an der Hamburger Universität zu halten. Diese Vorträge sind auch in Buchform in den Hamburger Mathematischen Einzelschriften erschienen [29]. Diese Vorträge zeichnen sich durch große Übersichtlichkeit und Klarheit aus. Im Zusammenhang mit dieser Publikation sei hervorgehoben: Vor *Escherichs* und *Radons* Arbeiten nahm man stillschweigend an, daß es im Lagrangeschen Problem bei

allen mit der Transformation der zweiten Variation in Zusammenhang stehenden Aufgaben nur notwendig sei, gewisse Differenzierbarkeitsforderungen an den Integranden des Variationsproblems zu stellen. Man dachte dabei fälschlich an Folgerungen, wie sie nur durch die Voraussetzung der Analytizität gefolgert werden können. Durch *Escherich* und *Radon* wurde es klar, daß es durch die Differenzierbarkeitsforderungen nicht verbürgt ist, daß sich die Dimensionszahl des Kontinuums, das durch die zugelassenen Extremalen überdeckt wird, nicht sprunghaft ändern kann. Diese Erkenntnis war für die Weiterentwicklung der Variationsrechnung von grundlegender Bedeutung. Zunächst führte sie zur Einführung des Begriffes der Klasse eines Extremalenbogens durch *Carathéodory* und im weiteren Verlauf zu Arbeiten von *Bliss*, *Morse* und einer großen Anzahl von Arbeiten von diesen beiden Forschern nahestehenden amerikanischen Mathematikern. Auch die unter [7] genannte Arbeit brachte eine für die Variationsrechnung bzw. für die Finslersche Geometrie grundlegende Tatsache zum Vorschein. *Blaschke* hatte kurz zuvor bewiesen, daß im Fall $n = 3$ die Voraussetzung, die Transversalitätsbedingung sei involutorisch, für den Riemannschen Raum kennzeichnend sei. Für den Fall $n = 2$ verhält sich, wie *Radon* zeigt, alles völlig anders. Hier treten als Indikatrix die nach ihm bezeichneten Kurven auf. Viele Arbeiten *Radons* auf dem Gebiet der Variationsrechnung hängen aufs engste mit differentialgeometrischen Problemen zusammen. Wir möchten hier insbesondere auf zwei Probleme hinweisen, die *Radon* behandelt und *Blaschke* publiziert hat, und zwar in *F. Kleins* Vorlesungen über Geometrie [21], [22] und *Blaschke*, Differentialgeometrie, Bd. 1, ferner auf die Arbeit [34], die mit einem von *Oseen* behandelten Problem der physikalischen Chemie zusammenhängt und vielleicht deshalb größere Beachtung verdienen würde, weil sie zur Behandlung von speziellen Variationsproblemen interessante Beispiele bieten dürfte.

Wir gehen nun dazu über, *Radons* differentialgeometrische Arbeiten zu besprechen. *Radons* Neigung zur Differentialgeometrie ist bei den bereits hervorgehobenen charakteristischen Eigenschaften seines Schaffens und Denkens durchaus verständlich. Anregungen aus der Anschauung und Bedürfnis nach Systematik waren hier die Triebfedern zu seiner Arbeit. Dazu kam noch, daß sein Studienkollege und Freund *Blaschke*, der bereits in jugendlichem Alter ungemein erfolgreich auf diesem Gebiet war, persönlich stark auf ihn einwirkte. *Blaschke* war in seiner Prager Zeit (1912—1915), angeregt durch die Arbeiten und den regen persönlichen Verkehr mit *G. Pick*, zum Mitbegründer der Affin-

geometrie geworden. Diesem Einfluß *Blaschkes* ist es wohl zuzuschreiben, daß sich *Radon* ebenfalls intensiv mit Affingeometrie zu beschäftigen begann, und so entstanden die unter [9] und [10] genannten Arbeiten über affine Differentialgeometrie. Vor allem die erste der genannten Arbeiten ist für *Radons* Wesen kennzeichnend. Sie handelt von den Grundgleichungen der affinen Flächentheorie. Ebenso kennzeichnend für *Radon* ist seine aus der Erlanger Zeit stammende Arbeit [15] über die Bestimmung der Riemannschen Metrik durch Krümmungseigenschaften, ein Problem, das ja für die Differentialgeometrie grundlegende Bedeutung hat. Daß *Radon* durch seine Beschäftigung mit Variationsrechnung vielfach mit differentialgeometrischen Problemen in Berührung kam, haben wir bereits erwähnt.

So bedeutend die bisher besprochenen Arbeiten *Radons* auch im einzelnen waren, so muß doch gesagt werden, daß *Radons* Name in erster Linie verknüpft ist mit seinen bedeutsamen Arbeiten über die Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Grundlegend war vor allem anderen seine unter [4] genannte Habilitationsschrift. Hieran schlossen sich die unter [11] und [12] genannten Arbeiten über lineare Funktionalgleichungen bzw. über Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. *Radons* Studienzeit fällt in eine Epoche, wo eine geradezu stürmische Entwicklung vor allem durch *Fredholms*, *Hilberts* und *E. Schmidts* Arbeiten auf dem Gebiet der Integralgleichungen einsetzte. Parallel mit dieser Entwicklung lief aber die Ausarbeitung einer abstrakt geometrischen Theorie des Hilbertschen Raumes, die sich insbesondere durch die mengentheoretischen Studien von *Hausdorff*, *Fréchet* und den grundlegenden Arbeiten von *F. Riesz* anbahnte. Es ist klar, daß diese großartigen Leistungen einen tief veranlagten jungen Mathematiker begeistern mußten. Dazu kam noch, daß sich *Radon* offenbar verhältnismäßig früh mit den grundlegenden Arbeiten von *Lebesgue* vollkommen vertraut gemacht hatte. Und so entstand der Plan zu seiner bereits genannten Arbeit [4]. Über sein Ziel äußerte er sich folgendermaßen: „In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht, die Theorie der linearen Integralgleichungen einerseits und der linearen und bilinearen Formen unendlich vieler Variabler andrerseits einer allgemeinen Theorie in dem Sinne unterzuordnen, daß die von *Hilbert* in seiner „vierten Mitteilung" eingeführten einfachen Methoden im wesentlichen bestehen bleiben und dann durch einfache Spezialisierung der gewonnenen Ergebnisse die wichtigsten Resultate obgenannter Theorien erhalten werden". Um aber die angedeutete Theorie

in möglichster Allgemeinheit aufzubauen, war, wie *Radon* selbst sagt, die Entwicklung einer Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen eine unabweisliche Vorarbeit. *Radon* war sich vollkommen dessen bewußt, daß diese Vorarbeit an und für sich von grundlegender Bedeutung für die gesamte Analysis werden mußte. Dies kommt schon in der Wahl des Titels dieser Arbeit zum Ausdruck.Der Ausbau der absolut additiven Mengenfunktionen nach der Richtung, wie sie für die oben zitierte Zielsetzung erforderlich war, bildet das Kernstück dieser Arbeit. Und besonders bezeichnend für *Radon* ist es, daß er auch hier wieder, wo es sich um den Ausbau einer allgemeinen Theorie handelt, von allem Anfang an, wie aus einer Fußnote hervorgeht, ein ganz konkretes Anwendungsgebiet vor Augen hat, und zwar waren es die potentialtheoretischen Untersuchungen *Plemeljs*, worauf wir später noch zurückkommen. Für den Aufbau der Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen war eine geeignete Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integralbegriffes nötig, die *Radon* in doppelter Weise vornimmt. Die eine im Anschluß an den Riemannschen Integralbegriff, die zweite im Sinn des Lebesgueschen Integralbegriffes. Die zweite Verallgemeinerung wird in der Literatur als *Radon-Stieltjes*sches Integral bezeichnet. Im Anschluß an die Aufstellung dieses Begriffes werden die zwei wichtigsten Sätze der Theorie bewiesen. Zunächst wird die Verallgemeinerung des Rieszschen Satzes über die Darstellbarkeit der linearen Funktionaloperationen und dann das Theorem der Darstellbarkeit der absolut additiven Mengenfunktion mit Hilfe des neuen Integralbegriffes bewiesen. *Radon* selbst beschränkt seine Untersuchungen auf im Borelschen Sinn meßbare Mengen. Später hat *Nikodym*, angeregt durch Arbeiten von *Fréchet* das zuletzt genannte Radonsche Theorem für eine umfassendere Klasse von Mengen verallgemeinert und so ist dieses überaus wichtige Theorem in die Literatur als *Radon-Nikodym*sches Theorem eingegangen. Durch Heranziehung der Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen gelingt es, die erste und zweite Randwertaufgabe der Theorie des logarithmischen Potentials unter viel allgemeineren Bedingungen zu lösen, als dies bisher gelungen war und zwar sowohl, was die Randkurve als auch, was die Randfunktionen betrifft.

Hiemit möchten wir den Überblick, den wir über *Radons* wissenschaftliches Werk zu geben versucht haben, beschließen. Dabei sind freilich viele schöne und erfolgreiche Einzeluntersuchungen nicht ausdrücklich hervorgehoben, so z. B. nicht die Arbeit über mechanische Kubatur [39], wie man aus dem beigefügten Verzeichnis von *Radons*

Arbeiten ersehen kann. Ergänzend möchten wir aber noch bemerken, daß sich *Radon* auch gerne mit philosophischen und erkenntnistheoretischen Fragen beschäftigte. Dies kommt insbesondere in seinem Inaugurationsvortrag: „Mathematik und Naturerkenntnis" [45] zum Ausdruck, wo er mit bewundernswerter Klarheit und Prägnanz tiefliegende Ideen zu formulieren wußte.

In der Einleitung haben wir schon einiges über *Radons* Persönlichkeit gesagt, so weit es für ein besseres Verständnis für seinen Werdegang und für sein wissenschaftliches Werk und zur Würdigung seiner Stellung im akademischen Leben an der Wiener Universität nötig schien. Wer aber das Glück hatte, *Radon* näher zu kennen, fühlt wohl bei diesem Anlaß auch die Pflicht, mehr darüber zu sagen. *Radons* äußere Erscheinung bot zunächst den Eindruck eines ernsten, stillen und intensiv geistig arbeitenden Menschen. Auch seine Schüler wurden in dieser Weise beeindruckt. Seine große Wirkung als Lehrer beruhte aber vor allem auf seinen bis ins Einzelne fein durchgearbeiteten Vorlesungen. Bei seiner eigenen wissenschaftlichen Arbeit war, wie wir gesehen haben, stets abstraktes Denken mit anschaulichem Erfassen an Beispielen in engster Verbindung, wie er auch selbst gelegentlich hervorhob. Er wollte an abstraktes Denken heranführen, aber um dieses Ziel zu erreichen, brachte er in seinen Vorlesungen viele gut ausgewählte Beispiele, und so gelang es ihm, bei einem verhältnismäßig großen Teil der Hörer schöne Lehrerfolge zu erzielen. Sein großes Pflichtbewußtsein nach jeder Seite hin und seine menschlich mitfühlende Art veranlaßten ihn, auch sehr sorgsam in Erwägung zu ziehen, welche Anforderungen man an die Hörer stellen könne. Wenn wir sagten, *Radons* äußere Erscheinung bot zunächst den Eindruck eines intensiv geistig arbeitenden Menschen, so müssen wir doch hinzufügen, daß sich in geselligem Verkehr, namentlich wenn er Verständnis für seine Eigenart vermutete, ein ganz anderes Bild bot: Freude an Musik, insbesondere guter Hausmusik, bei der er selbst Violine spielte, Freude an der Natur, die er in langen Spaziergängen genoß, Freude an guter, schöngeistiger Literatur. So las er gerne gelegentlich auch griechische und römische Autoren im Originaltext. Dies alles formte einen Menschen, der Schönes und auch Heiterkeit im geselligen Verkehr zu geben wußte. *Radon* war es beschieden, eine überaus verständnisvolle Lebensgefährtin in Frau *Marie*, geborene *Rigele* zu finden, die sich ganz seinem Leben anpaßte. Aus dieser Ehe stammten zwei Söhne und eine Tochter. Auf dieses so schöne und glückliche Familienleben fielen freilich auch

schwere Schatten, da beide Söhne in jugendlichem Alter starben. In den letzten Lebensjahren war es *Radon* vergönnt, noch sonnige Freude zu erleben. Seine Tochter ist verheiratet mit Dr. *E. Bukovics*, der als Dozent und Assistent an der Wiener Technischen Hochschule wirkt. Dieser Ehe entstammen zwei Kinder, an deren Entwicklung und Gedeihen *Radon* überaus herzlichen Anteil nahm.

Radon hat diese Zeitschrift seit 1947 herausgegeben. Mit großem Eifer und großer Sorgfalt widmete er sich all den Aufgaben, die daraus erwuchsen. Wenn wir hier, entsprechend einer Aufforderung der gegenwärtigen Herausgeber, versucht haben, in Worten festzuhalten, was *Radon* uns war, so geschah es mit dem innigen Wunsch, daß auch die, die nach uns kommen, diesen großen österreichischen Mathematiker richtig zu würdigen wissen.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten

[1] „Über das Minimum des Integrals $\int_{s_0}^{s_1} F(x, y, \vartheta, \varkappa)\, ds$". Sitzungsberichte der Wiener Akademie **119**, S. 1257—1326. (1910).

[2] „Zur Theorie der Mayerschen Felder beim Lagrangeschen Variationsproblem". Sitzungsberichte der Wiener Akademie **120**, S. 1337—1360. (1911).

[3] „Über einige Fragen, betreffend die Maxima und Minima mehrfacher Integrale". Monatshefte für Mathematik und Physik **22**, S. 53—63. (1911).

[4] „Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen". Sitzungsberichte der Wiener Akademie **122**, S. 1295—1438. (1913).

[5] „Über eine Erweiterung des Begriffes der konvexen Funktionen mit einer Anwendung auf die Theorie der konvexen Körper". Sitzungsberichte der Wiener Akademie **125**, S. 241—258. (1916).

[6] „Die Kettenlinie bei allgemeinster Massenverteilung". Sitzungsberichte der Wiener Akademie **125**, S. 221—240. (1916).

[7] „Über eine besondere Art ebener konvexer Körper". Leipziger Berichte **68**, S. 123—128. (1916).

[8] „Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten". Leipziger Berichte **69**, S. 262—277. (1917).

[9] „Über affine Geometrie XVI: Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie". Leipziger Berichte **70**, S. 91—107. (1918).

[10] „Über affine Geometrie XVII: Zur Affingeometrie der Regelflächen". Leipziger Berichte **70**, S. 147—155. (1919).

[11] „Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen". Anzeiger der Wiener Akademie **56**, S. 189 und Sitzungsberichte der Wiener Akademie (2) **128**, S. 1083—1121. (1919).

[12] „Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential". Anzeiger der Wiener Akademie **56**, S. 190 und Sitzungsberichte der Wiener Akademie (2) **128**, S. 1123—1167. (1920).

[13] „Lineare Scharen orthogonaler Matrizen". Hamburger Abhandlungen **1**, S. 1—14. (1921).

[14] „Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten". Mathematische Annalen **83**, S. 113—115. (1921).

[15] „Über die Bestimmung einer Riemannschen Metrik aus dem Krümmungstensor". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **30**, S. 76 (1921).

[16] „Zur Behandlung geschlossener Extremalen in der Variationsrechnung". Hamburger Abhandlungen **1**, S. 195—205. (1922) und **4**, S. 13—14. (1926).

[17] „Über statische Gravitationsfelder". Hamburger Abhandlungen **1**, S. 268—280. (1922).

[18] „Geometrie und Raumvorstellung". Naturwissenschaften **12**, 2 S. (1924).

[19] „Zur Riemannschen Geometrie". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **33**, S. 95—96. (1925).

[20] „Hermann Rothe †". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **35**, S. 172—175. (1926).

[21] „Mechanische Herleitung des Parallelismus von T. Levi-Civita". F. Kleins Vorlesungen über höhere Geometrie (bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke), S. 331—346, Springer-Verlag, 1926.

[22] „Über die Differentialgleichungen von Monge. Ihre Beziehungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zur Variationsrechnung". F. Kleins Vorlesungen über höhere Geometrie (bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke), S. 367—379, Springer-Verlag, 1926.

[23] „Über konforme Geometrie IV: Abbildung zweier Flächen aufeinander". Hamburger Abhandlungen **4**, S. 225—231. (1926).

[24] „Über konforme Geometrie V: Neue Kennzeichnung der zyklischen Kurvennetze". Hamburger Abhandlungen **4**, S. 313—320. (1926).

[25] „Mathematik und Wirklichkeit". Erlanger Sitzungsberichte **58/59**, S. 181—190. (1926/1927).

[26] „Über die Oszillationstheoreme der konjugierten Punkte beim Problem von Lagrange". Münchner Sitzungsberichte **1927**, S. 243—257.

[27] „Über konforme Geometrie VI: Kurvennetze auf Flächen und im Raume von Riemann". Hamburger Abhandlungen **5**, S. 45—53. (1927).

[28] „Bestimmung einer Riemannschen Metrik durch Krümmungseigenschaften". Monatshefte für Mathematik **35**, S. 9—24. (1928).

[29] „Zum Problem von Lagrange". Vier Vorträge, gehalten im Mathematischen Seminar der Hamburger Universität. 7.—24. Juli 1928. Hamburger Abhandlungen **6**, S. 273—299. (1928).

[30] Lösung einer Aufgabe, gestellt im Jahresbericht DMV. **43** (1933). Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **44**, S. 20—22. (1934).

[31] „Restausdrücke bei Interpolations- und Quadratformeln durch bestimmte Integrale". Monatshefte für Mathematik und Physik **42**, S. 389—396. (1935).

[32] „Annäherung konvexer Körper durch analytisch begrenzte". Monatshefte für Mathematik und Physik **43**, S. 340—344 (1936).

[33] „Singuläre Variationsprobleme". Jagresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **47**, S. 220—232. (1937).

[34] „Bewegungsinvariante Variationsprobleme, betreffend Kurvenscharen". Hamburger Abhandlungen **12**, S. 70—82. (1938).

[35] „Ein Satz der Matrizenrechnung und seine Bedeutung für die Analysis". Monatshefte für Mathematik und Physik **48**, S. 198—204. (1939).

[36] „Über Tschebyscheff-Netze auf Drehflächen und eine Aufgabe der Variationsrechnung". Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg

8/II, S. 147—151. (1940).

[37] „Ein einfacher Beweis für die Halbstetigkeit der Integrale der Variationsrechnung auf starken Extremalen". Mathematische Annalen **119**, S. 205—209. (1944).

[38] „Wilhelm Wirtinger", Nachruf. Almanach der Öst. Akademie d. Wiss. **95**, S. 336—346. (1945).

[39] „Zur mechanischen Kubatur". Monatshefte für Mathematik **52**, S. 286—300. (1948).

[40] „Über geschlossene Extremalen und eine einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichungen". Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Bd. **XXIX**, S. 315—320. (1949).

[41] "Godfrey Harald Hardy", Nachruf. Almanach der Öst. Akademie d, Wiss. **99**, S. 313—316. (1949).

[42] "Constantin Carathéodory", Nachruf. Almanach der Öst. Akademie d. Wiss. **100**, S. 323—328. (1950).

[43] „Zur Polynomentwicklung rationaler Funktionen". Mathematische Nachrichten **4**, S. 156—157. (1950/1951).

[44] „Gleichgewicht und Stabilität gespannter Netze". Archiv der Mathematik **5**, S. 309—316. (1954).

[45] „Mathematik und Naturerkenntnis". Inaugurationsvortrag, gehalten am 18. November 1954 anläßlich der Übernahme des Rektorates der Universität Wien. Wien 1954.

Über Ecken mit imaginären Winkeln und ihre konforme Abbildung

Von

Helmut Unkelbach, Bonn

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 5. September 1957)

§ 1. Geometrie der Ecken zweiter Art und gerader Ordnung 202
§ 2. Die Winkel der Ecken als funktionentheoretische Invarianten . . . 207
§ 3. Anwendung auf wesentliche Singularitäten lokal-schlichter meromorpher Funktionen 210

In der Theorie der konformen Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone $\mathfrak{Q}$, wie sie in meinen Arbeiten [2], [3] und [4] entwickelt ist, fehlte bisher noch die Definition der Winkel für Ecken von der Art $l = 2$ und von gerader Ordnung $k > 2$, sowie die Beantwortung der Frage, wie diese Winkel in den Abbildungsfunktionen zum Ausdruck kommen[1]. In meiner Arbeit [3], Seite 329 ergaben sich für Ecken 2. Art und für $k = 2$ imaginäre Winkel. Von hier aus gelangen wir zu einer „natürlichen" Verallgemeinerung der Winkeldefinition auch für Ecken beliebiger gerader Ordnung und 2. Art, indem wir solche Ecken durch „Zusammenrücken" von m Ecken 2. Ordnung erzeugen. Dabei setzen wir wieder wie in Arbeit [4]

$$m = \frac{k}{2}. \tag{1}$$

Es ergeben sich entsprechend der nachstehenden Formel (6) durchweg imaginäre Winkel ${}_kW$.

Eine geometrische Anschauung für Ecken von der Art $l = 2$ und der Ordnung $k \geq 4$ gewinnt man aus der für $k = 8$ gezeichneten Figur

[1] Für Ecken ungerader Ordnung gibt es vermutlich keine sinnvolle Winkeldefinition.

eines Dreiecks[2]. Zur Ecke E gehören $m-1$ isolierte Punkte $e_2, e_3, \ldots, e_m$.[3] Die Seiten s_1 und s_2, welche die Ecke E bilden, sind „unendliche" oder

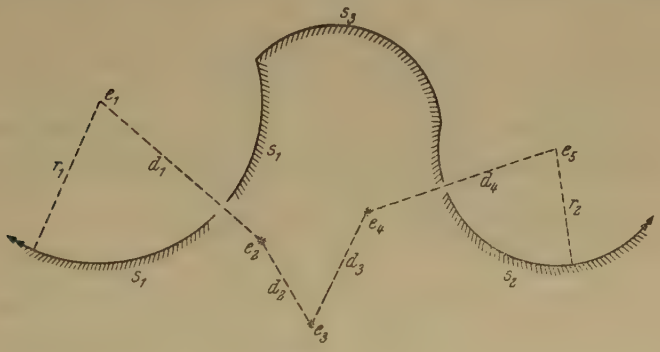

Abb. 1

„halbunendliche" Kreisbogen. Die Mittelpunkte von s_1 und s_2 bezeichnen wir mit e_1 und e_{m+1}.[4] Das Polygon enthält in einer „Umgebung" von E Hälften der Riemannschen Flächen von

$$\log\frac{z-e_2}{z-e_3},\quad \log\frac{z-e_3}{z-e_4},\quad \ldots,\quad \log\frac{z-e_{m-1}}{z-e_m}$$

sowie von den Hälften der Riemannschen Flächen von

$$\log\frac{z-e_1}{z-e_2},\quad \text{bzw. } \log\frac{z-e_m}{z-e_{m+1}},$$

gewisse Teile, welche durch s_1 und e_2 bzw. s_2 und e_m begrenzt werden (vgl. die Figur). Für die Abstände zwischen den Punkten $e_1, e_2, \ldots, e_{m+1}$ setzen wir

$$d_1 = \overline{e_1\,e_2},\quad d_2 = \overline{e_2\,e_3},\quad \ldots,\quad d_m = \overline{e_m\,e_{m-1}}. \tag{2a}$$

Die Radien von s_1 bzw. s_2 bezeichnen wir mit r_1 bzw. r_2. Den Abstand des Punktes e_2 bzw. e_m von dem zu s_1 bzw. s_2 gehörenden Kreis bezeichnen wir mit d_1^* bzw. d_m^*. Falls s_1 bzw. s_2 nicht geradlinig ist, gilt

[2] Wie in der Arbeit [2] deutet in der Figur ein Doppelpfeil an, daß sich der Kreisbogen in der betreffenden Richtung über unendlich viele Umdrehungen erstreckt. Diejenigen Ufer der Polygonseiten, welche das Dreieck beranden, sind schraffiert.

[3] Eine Ecke erster Art hat nur $m-2$ isolierte Punkte. Vgl. hierzu meine Arbeit [2], Seite 400/404.

[4] Die Punkte e_1 und e_{m+1} sind nicht Eckenelemente im Sinne der Arbeit [2], Seite 404.

$$d_1^* = |d_1 - r_1| \text{ bzw. } d_m^* = |d_m - r_2|. \tag{2b}$$

Bei der konformen Abbildung von $\mathfrak{Q}$ auf die obere ζ-Halbebene fallen die Bilder aller Punkte $e_2, e_3, \ldots, e_m$ in denselben Punkt $\varkappa$ der reellen Achse, welchen wir als das Bild von E bezeichnen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varkappa = 0$ setzen. Bildet man für die Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ die Schwarzsche Differentialinvariante $\{z, \zeta\}$, dann gilt für diese auf Grund von [2] in einer Umgebung von $\zeta = 0$ eine Entwicklung der folgenden Gestalt (mit reellen Koeffizienten[5]:

$$\{z, \zeta\} = (-1)^l \frac{a_k}{\zeta^k} + \frac{a_{k-1}}{\zeta^{k-1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^0 a_\nu \zeta^\nu;$$

$$a_k > 0; \quad k = 4, 6, 8, \ldots; \quad l = 1, 2. \tag{3}$$

In meiner Arbeit [4] wurde der Winkel ${}_kW$ von E für Ecken erster Art als Funktion der Koeffizienten $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_k$ dargestellt. Die entsprechende Darstellung wird in der vorliegenden Arbeit für Ecken der 2. Art abgeleitet. Die Funktionen (10) sind im Sinne meiner Arbeit [3] Invarianten kongruenter Ecken.

Durch Anwendung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit und der Arbeit [4] lassen sich Aussagen über die konformen Abbildungen gewinnen, welche durch lokal-schlichte meromorphe Funktionen vermittelt werden. Wir nennen eine meromorphe Funktion $z = f(\zeta)$ lokal-schlicht, wenn $f'(\zeta) \neq 0$ ist und wenn alle Pole von der 1. Ordnung sind. Für die isolierten wesentlichen Singularitäten solcher Funktionen lassen sich gewisse elementare Beziehungen ableiten zwischen den asymptotischen Werten[6] und gewissen Koeffizienten der Schwarzschen Differentialgleichungen, welchen die Funktionen genügen (vgl. § 3, (19) und Satz 4).

§ 1. Geometrie der Ecken zweiter Art und gerader Ordnung

Wir betrachten ein Polygon $\mathfrak{Q}$ mit den Ecken $E = E_1, E_2, \ldots, E_n$. Die Ecke E sei von der 2. Art und von gerader (k-ter) Ordnung. Die Seiten von $\mathfrak{Q}$ seien $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Zunächst definieren wir die Erzeugung der Ecke E von der k-ten Ordnung und 2. Art durch „Zusammenrücken" von m Ecken 2. Ordnung

---

[5] Die Definition des Vorzeichens von a_k stimmt hier mit meiner Arbeit [4] überein, jedoch nicht mit meinen Arbeiten [2] und [3]. In *diesen* Arbeiten kommen auch negative a_k vor, da der Koeffizient a_k mit dem Faktor $(-1)^{k+l}$ zusammengefaßt ist.

[6] Vgl. meine Arbeit [1], Seite 102.

mit Hilfe einer Folge von Polygonen $\mathfrak{G}_\mu$ mit den Ecken 2. Ordnung

$$E_{1,\lambda}^{(\mu)},\ \lambda = 1, 2, \ldots, m,$$

und mit den Ecken

$$E_\nu^{(\mu)},\ \nu = 2, 3, \ldots, n$$

für welche folgendes gilt[7]:

1. $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \mathfrak{G}_3 \subseteq \ldots$

2. $\mathfrak{Q}$ ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{G}_1 \dot{+} \mathfrak{G}_2 \dot{+} \mathfrak{G}_3 \dot{+} \ldots$

3. Die uneigentlichen Elemente der Ecken $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ sind zugleich die uneigentlichen Elemente der Ecke E.

4. Die Seiten $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und die Ecken $E_2, E_3, \ldots, E_n$ seien zugleich Seiten und Ecken jedes Polygons $\mathfrak{G}_\mu$.

Die Folge $\mathfrak{G}_\mu$ können wir auf Grund der in [2], § 2 entwickelten Geometrie der Kreisbogenpolygone folgendermaßen konstruieren: Zu jedem eigentlichen Eckenelement e_ν von E, $\nu = 2, 3, \ldots, m$ betrachten wir auf $\mathfrak{Q}$ eine Folge unendlicher Kreisbogen $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots$ mit den Radien $r_{\nu,\mu}$, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) Durch einen Schnitt längs $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$ wird von $\mathfrak{Q}$ ein zusammenhängendes Teilpolygon $\mathfrak{q}_{\nu,\mu}$ abgetrennt, dessen Rand aus $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$ und e_ν besteht.

b) $\lim\limits_{\mu \to \infty} r_{\nu,\mu} = 0$ für $\nu = 2, 3, \ldots, m$.

c) Die Kreisbogen $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$ und der Rand von $\mathfrak{Q}$ seien auf der Riemannschen Fläche disjunkt.

Mit Hilfe der Teilpolygone $\mathfrak{q}_{\nu,\mu}$ definieren wir nunmehr die Folge $\mathfrak{G}_\mu$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}_\mu + \mathfrak{q}_{2,\mu} + \mathfrak{q}_{3,\mu} + \ldots + \mathfrak{q}_{m,\mu}. \tag{4}$$

Man erkennt ohne weiteres, daß die Folge $\mathfrak{G}_\mu$ die obigen vier Forderungen erfüllt, so daß analog [3], Seite 330, die Ausdrucksweise gerechtfertigt ist, daß E durch „Zusammenrücken" der Ecken $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ erzeugt wird. Diese Ecken werden durch folgende Seiten gebildet:

$E_{1,1}^{(\mu)}$	durch	s_1	und	$\mathfrak{r}_{2,\mu}$;
$E_{1,2}^{(\mu)}$	durch	$\mathfrak{r}_{2,\mu}$	und	$\mathfrak{r}_{3,\mu}$;
.....				
$E_{1,m-1}^{(\mu)}$	durch	$\mathfrak{r}_{m-1,\mu}$	und	$\mathfrak{r}_{m,\mu}$;
$E_{1,m}^{(\mu)}$	durch	$\mathfrak{r}_{m,\mu}$	und	s_2.

[7] Vgl. [2], Seite 404.

Die Ecken $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ sind von der 2. Art. Nach [3], Seite 329, sind für die Ecken $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ imaginäre Wickel $w_{1,\lambda}^{(\mu)}$ definiert. Für den Komplex aufeinanderfolgender Ecken $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$ definieren wir entsprechend [3], Seite 330/331 den Komplexwinkel

$$w^{(\mu)} = \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{\lambda-1} w_{1,\lambda}^{(\mu)}. \tag{5}$$

Dann gilt:

Satz 1: Der $\lim_{\mu\to\infty} w^{(\mu)}$ existiert und ist unabhängig von der Wahl der Folge $\mathfrak{G}_\mu$. Bei Benutzung der Bezeichnung (2a) gilt:

$$_kW = \lim_{\mu\to\infty} w^{(\mu)} =$$

$$= i \,.\, \log \frac{|\, d_1^2 - r_1^2 \,|\,.\,|\, d_m^2 - r_2^2 \,|}{r_1\, r_2} \cdot \frac{d_3^2\, d_5^2 \ldots d_{m-2}^2}{d_2^2\, d_4^2 \ldots d_{m-1}^2}$$

für ungerades $m \geq 3$; (6)

$$_kW = i \,.\, \log \frac{r_2\,|\, d_1^2 - r_1^2 \,|}{r_1\,|\, d_m^2 - r_2^2 \,|} \cdot \frac{d_3^2\, d_5^2 \ldots d_{m-1}^2}{d_2^2\, d_4^2 \ldots d_{m-2}^2}$$

für gerades m.

Für diejenigen Eckenelemente e_ν, $\nu = 2, 3, \ldots, m$, welche über dem Punkt $z = \infty$ liegen, fallen die betreffenden Faktoren $d_{\nu-1}^2$ und d_ν^2 in (6) weg.

Wenn die Seiten s_1 und s_2 geradlinig sind, ergibt sich statt (6) die Formel:

$$_kW = i \,.\, \log 4 \,.\, \frac{d_1^*\, d_3^2\, d_5^2 \ldots d_{m-2}^2\, d_m^*}{d_2^2\, d_4^2 \ldots d_{m-1}^2}$$

für ungerades $m \geq 3$; (6a)

$$_kW = i \,.\, \log \frac{d_1^*\, d_3^2\, d_5^2 \ldots d_{m-1}^2}{d_2^2\, d_4^2 \ldots d_{m-2}^2\, d_m^*}$$

für gerades m.

Entsprechende Formeln ergeben sich, wenn nur eine der beiden Seiten s_1 und s_2 geradlinig ist.

Der Wert $_kW$ ist stets endlich.

Beweis: Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß unter den Kreisen s_1, $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$ und s_2 keine gerade Linie vorkommt und daß keines der Eckenelemente $e_2, e_3, \ldots, e_m$ über dem Punkt $z = \infty$ liegt. Man überlegt sich leicht, wie die folgenden Überlegungen modifiziert werden müssen, wenn die Annahme nicht zutrifft.

Die Mittelpunkte der zu den Kreisbogen $\mathfrak{r}_{\nu,\mu}$ gehörenden Kreise bezeichnen wir mit $e_{\nu,\mu}$. Die Abstände der Kreismittelpunkte seien:

$$d_{1,\mu} = \overline{e_1 e_{2,\mu}}, \quad d_{2,\mu} = \overline{e_{2,\mu} e_{3,\mu}}, \ \ldots, \quad d_{m,\mu} = \overline{e_{m,\mu} e_{m+1}}. \tag{7}$$

Wegen der obigen Konstruktion der Folge $\mathfrak{G}_\mu$ ist:

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu \to \infty} e_{\nu,\mu} = e_\nu; \qquad \nu = 2, 3, \ldots, m; \\ &\lim_{\mu \to \infty} d_{\nu,\mu} = d_\nu; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m+1. \end{aligned} \tag{8}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir vorübergehend $r_1 = r_{1,\mu}$, $r_2 = r_{m+1,\mu}$.

Für die Winkel $w^{(\mu)}_{1,\lambda}$, aus denen der Komplexwinkel $w^{(\mu)}$ gemäß (5) aufgebaut ist, gilt entsprechend meiner Arbeit [3], Seite 329:

$$\cos w^{(\mu)}_{1,\lambda} = \left| \frac{r^2_{\lambda,\mu} + r^2_{\lambda+1,\mu} - d^2_{\lambda,\mu}}{2\, r_{\lambda,\mu} \cdot r_{\lambda+1,\mu}} \right|^{8}$$

$$\sin w^{(\mu)}_{1,\lambda} = \frac{i}{2\, r_{\lambda,\mu} \cdot r_{\lambda+1,\mu}} \sqrt{r^4_{\lambda,\mu} + r^4_{\lambda+1,\mu} + d^4_{\lambda,\mu} - 2r^2_{\lambda,\mu} r^2_{\lambda+1,\mu} - 2r^2_{\lambda,\mu} d^2_{\lambda,\mu} - 2r^2_{\lambda+1,\mu} d^2_{\lambda,\mu}}$$

$$= \frac{i}{2\, r_{\lambda,\mu} \cdot r_{\lambda+1,\mu}} \cdot A_{\lambda,\mu} \text{ mit } A_{\lambda,\mu} > 0.$$

Daraus folgt:

$$w^{(\mu)}_{1,\lambda} = i \log \frac{|\, r^2_{\lambda,\mu} + r^2_{\lambda+1,\mu} - d^2_{\lambda,\mu} \,| + A_{\lambda,\mu}}{2\, r_{\lambda,\mu}\, r_{\lambda+1,\mu}}$$

$$= i \log \frac{B_{\lambda,\mu}}{r_{\lambda,\mu} \cdot r_{\lambda+1,\mu}}.$$

In diesen Gleichungen sind $A_{\lambda,\mu}$ und $B_{\lambda,\mu}$ Abkürzungen der betreffenden Ausdrücke. Also ergibt sich aus (5):

$$w^{(\mu)} = i \log \frac{B_{1,\mu} \cdot B_{3,\mu}, \ldots, B_{m,\mu}}{r_1 r_2 B_{2,\mu} B_{4,\mu} \ldots B_{m-1,\mu}}$$

für ungerades $m \geq 3$;

$$w^{(\mu)} = i \log \frac{r_2 B_{1,\mu} B_{3,\mu} \ldots B_{m-1,\mu}}{r_1 B_{2,\mu} B_{4,\mu} \ldots B_{m,\mu}}$$

für gerades m.

[8] In meiner Arbeit [3] sind die Absolutstriche dieser Formel versehentlich weggelassen.

Wegen b), Seite 203 und (8) gilt:

$$\lim_{\mu\to\infty} B_{1,\mu} = |\, d_1^2 - r_1^2 \,|$$

$$\lim_{\mu\to\infty} B_{\lambda,\mu} = d_\lambda^2 \text{ für } \lambda = 2, 3, \ldots, m-1$$

$$\lim_{\mu\to\infty} B_{m,\mu} = |\, d_m^2 - r_2^2 \,|$$

Daraus folgen unmittelbar die Gleichungen (6), in denen die Gleichungen (6a) als Grenzfälle enthalten sind.

Entsprechend meinen Arbeiten [1], Seite 90, und [2], Seite 403, können zwei aufeinanderfolgende Eckenelemente e_ν und $e_{\nu+1}$, $\nu = 2, 3, \ldots, m-1$, nicht über demselben Punkt der z-Ebene liegen. Also ist

$$d_\lambda \neq 0 \text{ für } \lambda = 2, 3, \ldots, m-1.$$

Aus analogen topologischen Überlegungen ergibt sich

$$d_1 \neq r_1, \qquad d_m \neq r_2.$$

Ferner ist

$$r_1 \neq 0, \qquad r_2 \neq 0.$$

Daraus folgt, daß der Wert ${}_kW$ stets endlich ist. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 1 führt zu der folgenden Definition.

Definition: Eine Ecke gerader Ordnung und 2. Art besitzt den Winkel ${}_kW$.[9]

Zur Herleitung der funktionentheoretischen Invarianten ist es zweckmäßig, die Ecke E von der k-ten Ordnung durch „Zusammenrücken" von zwei Ecken zu erzeugen, und zwar einer Ecke ${}_{k-2}E_{1,1}^{(\mu)}$ von der $(k-2)$-ten Ordnung und einer Ecke ${}_2E_{1,2}^{(\mu)}$ von der 2. Ordnung. Die Ecken ${}_{k-2}E_{1,1}^{(\mu)}$ und ${}_2E_{1,2}^{(\mu)}$ mögen für jedes μ Ecken des Polygons $\mathfrak{Q}_\mu$ sein. Das „Zusammenrücken" möge bedeuten, daß die Forderungen 1. bis 4. von Seite 203 gelten, wobei statt $\mathfrak{G}_\mu$ bzw. $E_{1,\lambda}^{(\mu)}$ jetzt $\mathfrak{Q}_\mu$ bzw. ${}_{k-2}E_{1,1}^{(\mu)}$ und ${}_2E_{1,2}^{(\mu)}$ zu setzen ist.

[9] Vergleicht man diese Definition mit den vier Forderungen, welche in meiner Arbeit [3], Seite 330/331, an eine Winkeldefinition gestellt werden, so erkennt man, daß Forderung A erfüllt ist, da kongruente Ecken denselben Winkel besitzen. Auf Forderung B muß hier verzichtet werden, da bei echten Ecken imaginäre Winkel nicht vorkommen. Forderung C ist in abgewandelter Form erfüllt, da ${}_kW$ als *Grenzwert* eines Komplexwinkels definiert ist. Forderung D ist erfüllt.

Die Folge $\mathfrak{Q}_\mu$ können wir folgendermaßen konstruieren: Zu dem Eckenelement e_m betrachten wir auf $\mathfrak{Q}$ eine Folge unendlicher Kreisbogen $\mathfrak{r}_{m,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots$, mit den Radien $r_{m,\mu}$. Die Bedingungen a) bis c) von Seite 203 seien erfüllt, wobei $\nu = m$ zu setzen ist. Dann ist die Folge $\mathfrak{Q}_\mu$ definiert durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\mu + \mathfrak{q}_{m,\mu}. \tag{9}$$

Man erkennt wie oben, daß die Folge $\mathfrak{Q}_\mu$ die Forderungen 1. bis 4. erfüllt. Für die Winkel ${}_{k-2}W^{(\mu)}_{1,1}$ und ${}_2W^{(\mu)}_{1,2}$ der Ecken ${}_{k-2}E^{(\mu)}_{1,1}$ und ${}_2E^{(\mu)}_{1,2}$ gilt der folgende

Satz 2: ${}_kW = \lim\limits_{\mu\to\infty} ({}_{k-2}W^{(\mu)}_{1,1} + (-1)^{m-1}\,{}_2W^{(\mu)}_{1,2})$.

Beim Beweis von Satz 2 wird die Formel (6) benutzt, wobei k durch $k-2$ und m durch $m-1$ zu ersetzen ist. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 1.

§ 2. Die Winkel der Ecken als funktionentheoretische Invarianten

Der Satz meiner Arbeit [4] kann nunmehr in der Weise verallgemeinert werden, daß er für beliebige Ecken gerader Ordnung gültig wird. Die Verallgemeinerung läßt sich folgendermaßen formulieren (wobei wir zum Unterschied von der bisherigen Bezeichnungsweise die Art l einer Ecke als weiteren Index zur Ordnung k hinzufügen):

Satz 3: Bezeichnen wir den Winkel einer Ecke der Ordnung k und der Art l mit ${}_{k,l}W = \alpha_{k,l} \cdot \pi$, dann gilt mit den Bezeichnungsweisen von (1) und (3) für gerades $k \geq 4$

$$\alpha_{k,l} = \frac{\sqrt{2}\cdot i^{k+l^2-1}}{N\cdot\sqrt{a_k^{\,k-3}}} \cdot \Sigma\,(-1)^{(l-1)\,\xi}\cdot c_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{m-1}}\cdot a_{\nu_1}a_{\nu_2}\ldots a_{\nu_{m-1}} \tag{10}$$

Dabei ist ξ für jedes Glied der Summe Σ gleich der Anzahl derjenigen unter den Koeffizienten $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_{m-1}}$, für welche $\nu_\mu = k$ ist. Die Summe Σ erstreckt sich über alle $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-1}$, für welche gilt

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{m-1} = (m-1)\,(k-1). \tag{11}$$

Die Koeffizienten $c_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{m-1}}$ sind positive ganze Zahlen, welche sich entsprechend dem folgenden Beweis berechnen lassen. N ist eine positive ganze Zahl, und zwar gilt:

$$N = 2^{\frac{3}{2}m-2}\left(\frac{m-2}{2}\right)!\ \text{für gerades } m. \tag{12a}$$

$$N = 2^{\frac{3}{2}(m-1)} \left(\frac{m-1}{2}\right)! \text{ für ungerades } m \geq 3. \tag{12b}$$

Aus (11) folgt insbesondere

$$\nu_\mu \geq m+1 \text{ für } \mu = 1, 2, \ldots, m-1,$$

d. h., daß die Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in (10) nicht vorkommen.

Beweis: Für den Fall $l = 1$ ist Satz 3 bereits in meiner Arbeit [4] bewiesen.

Für den Fall $l = 2$ setzen wir zunächst $k = 4$. Zur Abkürzung setzen wir in diesem Fall

$$\begin{aligned} {}_{k-2}W^{(\mu)}_{1,1} = {}_2W^{(\mu)}_{1,1} &= \pi\varphi = \pi \cdot \varphi(\mu) \\ {}_2W^{(\mu)}_{1,2} &= \pi\chi = \pi \cdot \chi(\mu). \end{aligned}$$

Die Funktion $z = f_\mu(\zeta)$ möge das Polygon $\mathfrak{Q}_\mu$ der z-Ebene in der Weise auf die obere ζ-Halbebene abbilden, daß die Ecken ${}_2E^{(\mu)}_{1,1}$ bzw. ${}_2E^{(\mu)}_{1,2}$ den Punkten $\zeta = 0$ bzw. $\zeta = \varkappa(\mu) > 0$ entsprechen. Dann genügt die Abbildungsfunktion $z = f_\mu(\zeta)$ einer Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \{z, \zeta\} &= \frac{1-\varphi^2}{2\zeta^2} + \frac{{}^{(\mu)}A_1}{\zeta} + \frac{1-\chi^2}{2(\zeta-\varkappa)^2} + \frac{{}^{(\mu)}A_1'}{\zeta-\varkappa} + g_\mu(\zeta) \\ &= \frac{{}^{(\mu)}B_4 + {}^{(\mu)}B_3 \cdot \zeta + {}^{(\mu)}B_2 \cdot \zeta^2 + {}^{(\mu)}B_1 \zeta^3}{\zeta^2(\zeta-\varkappa)^2} + g_\mu(\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wobei $g_\mu(\zeta)$ eine in den Punkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \varkappa$ reguläre Funktion ist. Zwischen den Koeffizienten der obigen Gleichung bestehen die folgenden Beziehungen (wobei wir die oberen Koeffizienten μ der Kürze halber weglassen):

$$B_4 = \frac{\varkappa^2}{2}(1-\varphi^2)$$

$$2B_4 + \varkappa B_3 = \varkappa^3 A_1.$$

Also ist

$$\varkappa A_1 - \frac{1-\varphi^2}{2} = \frac{B_3}{\varkappa} + \frac{B_4}{\varkappa^2} \tag{14}$$

Außerdem folgt aus Gleichung (5) meiner Arbeit [2], Seite 407:

$$A_1 + A_1' + \sum_{\nu=2}^{n} a^{(\mu)}_{\nu,1} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1-\varphi^2}{2} + \frac{1-\chi^2}{2} + A'_1\varkappa + \sum_{\nu=2}^{n} (a^{(\mu)}_{\nu,2} + \varkappa_\nu^{(\mu)} a^{(\mu)}_{\nu,1}) = 0. \tag{16}$$

Dabei sind die $a_{\nu,2}^{(\mu)}$ die Koeffizienten der meromorphen Teile von $g_\mu(\zeta)$, welche zu den betreffenden Ecken gehören. Aus den Bedingungen 1. bis 4. von Seite 203 ergeben sich wie in meinen Arbeiten [1], Seite 98/100, sowie [2] bis [4] die Grenzübergänge

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\mu\to\infty} a_{\nu,\lambda}^{(\mu)} &= a_{\nu,\lambda} \\ \lim_{\mu\to\infty} \varkappa_\nu^{(\mu)} &= \varkappa_\nu \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu = 2, 3, \ldots, n;$$

$$\lim_{\mu\to\infty} {}^{(\mu)}B_\lambda = a_{1,\lambda} \text{ für } \lambda = 1, 2, 3, 4;$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \varkappa(\mu) = 0$$

$$\lim_{\mu\to\infty} A_1 = +\infty \quad \lim_{\mu\to\infty} A'_1 = -\infty$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \varkappa \,.\, (A_1 + A_1') = 0. \tag{17}$$

Außerdem folgt aus unserer Winkeldefinition

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\varphi}{i} = +\infty, \quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{\chi}{i} = -\infty.$$

Aus (14), (15), (16) und (17) folgt

$$\chi^2 = -\frac{2\,B_4}{\varkappa^2} - \frac{2\,B_3}{\varkappa} - 2\,Q_1$$

mit $\lim_{\mu\to\infty} Q_1 \neq \infty$,

$$\chi = i\,\frac{\sqrt{2\,B_4}}{\varkappa}\sqrt{1 + \varkappa\left(\frac{B_3}{B_4} + \varkappa\,Q_2\right)}$$

mit $\lim_{\mu\to\infty} Q_2 \neq \infty$

oder $\chi = i\,\frac{\sqrt{2\,B_4}}{\varkappa}\left(1 + \frac{B_3}{2\,B_4}\,\varkappa + \ldots\right)$.

Außerdem ist

$$\varphi^2 = 1 - \frac{2\,B_4}{\varkappa^2}$$

$$\varphi = i\,\frac{\sqrt{2\,B_4}}{\varkappa}\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{2\,B_4}}$$

$$= i\,\frac{\sqrt{2\,B_4}}{\varkappa}\left(1 - \frac{\varkappa^2}{4\,B_4} + \ldots\right)$$

$$\varphi - \chi = -i \,.\, \lim_{\mu\to\infty} \frac{\sqrt{2}\,B_3}{2\sqrt{B_4}} = -i\,\frac{\sqrt{2}\,a_3}{2\sqrt{a_4}}$$

womit Formel (10) für $k = 4$ ist.

Für gerades $k \geq 6$ wird der Beweis von Satz 3 durch vollständige Induktion geführt. Man überlegt sich, daß sich die Induktion meiner Arbeit [4] auf den vorliegenden Fall übertragen läßt.

§ 3. Anwendung auf wesentliche Singularitäten lokal-schlichter meromorpher Funktionen

Wir bezeichnen nachstehend mit $z = f(\zeta)$ eine in dem gelochten Kreis $0 < |\zeta| < \varepsilon$ eindeutige, meromorphe, lokal-schlichte Funktion, welche für $0 < \zeta < \varepsilon$ reell ist[10]. Der Punkt $\zeta = 0$ sei eine wesentliche Singularität von $f(\zeta)$. Die asymptotischen Werte dieser Singularität bezeichnen wir mit $z_1, z_2, \ldots, z_N$, wo N als gerade Zahl vorausgesetzt wird. Dann ist $z = f(\zeta)$ eine Lösung einer Differentialgleichung der folgenden Gestalt:

$$\{z,\zeta\} = (-1)^l \frac{a_{N+2}}{\zeta^{N+2}} + \frac{a_{N+1}}{\zeta^{N+1}} + \ldots + \frac{a_1}{\zeta} + R(\zeta), \qquad (18)$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_{N+1} \text{ reell}, \quad a_{N+2} > 0,$$

wo $R(\zeta)$ eine für $|\zeta| < \varepsilon$ reguläre und reelle Funktion ist. Der $\lim_{\zeta \to 0} f(\zeta)$ existiert sowohl für positive als auch für negative Werte von ζ, wenn $l = 1$ ist, er existiert weder für positive noch für negative Werte von ζ, wenn $l = 2$ ist.

Zwischen den asymptotischen Werten $z_1, z_2, \ldots, z_N$ und den Koeffizienten $a_{N+2}, a_{N+1}, \ldots, a_{n+2}$, wo $n = \frac{N}{2}$ gesetzt ist[11], läßt sich nun die folgende Beziehung ableiten: Wir bilden aus $z_1, \ldots, z_N$ das nachstehende Produkt von Differenzenquotienten:

$$Z = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z_{2\nu} - z_{2\nu-1}}{z_{2\nu+1} - z_{2\nu}}, \qquad z_{N+1} = z_1.^{12} \qquad (19)$$

Dann gilt

Satz 4: Setzen wir $k = N + 2$, dann ist

$$Z = (-1)^{w-1} \cdot \exp\left[i\pi \cdot F_{k,l}(a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{m+1})\right],$$

---

[10] Für nicht-reelle Funktionen vgl. die Schlußbemerkung.

[11] n hat eine andere Bedeutung als bisher.

[12] Z ist gegenüber linearen Transformationen der z-Ebene invariant. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle Werte $z_1, z_2, \ldots, z_N$ als endlich voraussetzen.

wo mit F die rechte Seite von (10) bezeichnet ist und w, das die Werte 1 oder 2 annimmt, definiert ist durch

$$f'(-\zeta) = (-1)^w . f'(\zeta), \qquad 0 < \zeta < \varepsilon.$$

Beweis: Die durch $z = f(\zeta)$ vermittelte konforme Abbildung können wir in der Terminologie der verallgemeinerten Kreisbogenpolygone folgendermaßen beschreiben: Der Halbkreis $|\zeta| < \varepsilon$, $\Im(\zeta) > 0$ wird auf eine „Umgebung" einer Kreisbogenecke der Ordnung k und der Art l abgebildet. Die Bilder der Strecken $-\varepsilon < \zeta < 0$ und $0 < \zeta < \varepsilon$ liegen hierbei auf den Seiten dieser Ecke, der Punkt $\zeta = 0$ wird auf die „Eckenelemente" abgebildet. Bezeichnen wir den Winkel der Ecke mit W, dann folgt aus einer elementaren Rechnung:

$$Z = (-1)^{w-1} . e^{iW}$$

Hieraus und aus Satz 3 folgt unmittelbar Satz 4.

Wenn die Voraussetzung, daß die Funktion $f(\zeta)$ in einer Umgebung von $\zeta = 0$ reell ist, fallengelassen wird, erfüllt $f(\zeta)$ eine Differentialgleichung (18) mit komplexen Koeffizienten. In diesem Falle gibt es für gerades N vermutlich eine Analogie zu Satz 4.

Literatur

[1] *Helmut Unkelbach*: Die konforme Abbildung echter Polygone. Math. Ann. **125**, 82—118 (1952).

[2] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone I. Math. Ann. **129**, 391—414 (1955).

[3] *Helmut Unkelbach*: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone II. Math. Ann. **130**, 327—336 (1955).

[4] *Helmut Unkelbach*: Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung. Math. Ann. **133**, 320—327 (1957).

[5] *F. Stallmann*: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen I. Math. Z. **60**, 187—212 (1954).

Weitere Literatur in [1] und [5].

Über 4- und 5-chrome Graphen

Von

Bernhardine Zeidl, Wien

(Eingegangen am 16. Oktober 1957)

Im folgenden wird eine Verschärfung eines Satzes von *G. A. Dirac* [1] über 4-chrome Graphen bewiesen. Ferner werden 4- und 5-chrome punktkritische Graphen beliebig hohen Geschlechtes konstruiert. Die hier betrachteten Graphen sind eigentliche Graphen, d. h. zwei Punkte sind höchstens durch eine Kante verbunden, und kein Punkt ist mit sich selbst durch eine Schlinge verbunden. Zunächst einige Definitionen und bekannte Sätze:

Definition 1: Ein Graph heißt k-chrom, wenn seine Punkte so in k elementfremde Klassen eingeteilt werden können, daß nie zwei Punkte derselben Klasse durch eine Kante verbunden sind, und k die kleinste Zahl dieser Eigenschaft ist.

Definition 2: Ein k-chromer Graph heißt punktkritisch, wenn kein Punkt (und alle mit diesem inzidenten Kanten) gestrichen werden kann, ohne seine Chromzahl zu reduzieren. Ein k-chromer Graph heißt kritisch, wenn kein Punkt und keine Kante gestrichen werden kann, ohne seine Chromzahl zu reduzieren.

Definition 3: Ein Weg aus einem Graphen Γ, der mit einem gegebenen Kreis $\mathfrak{K}$ aus Γ seine Endpunkte, aber keinen anderen Punkt und auch keine Kante gemein hat, heiße Sehne von $\mathfrak{K}$.

$$\mathfrak{K} = P_1 P_2 \dots P_r \dots P_s \dots P_n = P_1 \,^{1}$$

1. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}$ aus Γ), der keine Artikulation ist und einen Grad $\geqq 3$ hat, geht mindestens eine Sehne von $\mathfrak{K}$.

Beweis für einen etwas engeren Begriff von „Sehne" siehe [1].

Verstehen wir unter einem ungeraden Kreis einen Kreis ungerader Länge, so gilt:

[1] Zur Bezeichnungsweise: Ein Weg $\mathfrak{W}$ wird auch durch die Folge seiner Punkte $P_1 P_2 \dots P_l$ charakterisiert. Durch das Zeichen „+" symbolisieren wir das Bilden der Vereinigungsmenge aus den Kanten-, sowie Punktmengen zweier Graphen.

2. Ist Γ ein zusammenhängender Graph ohne Artikulation und enthält Γ einen ungeraden Kreis $\mathfrak{K}$, so gibt es durch jeden Punkt Q aus Γ einen ungeraden Kreis.

Beweis siehe [2].

Definition 4: Ein eigentlicher Graph der Ordnung 4, in dem je zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind, heißt vollständiger 4-Graph. Zum vollständigen 4-Graphen homöomorphe Graphen wollen wir kurz V-Graphen nennen, und ihre Punkte vom Grade 3 Verzweigungspunkte.

Definition 5: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten eines zusammenhängenden Graphen Γ heißt Isthmoid von Γ, wenn Γ durch Streichen aller Punkte aus $\mathfrak{M}$ und aller mit diesen inzidenten Kanten in $q \geqq 2$ zueinander fremde, zusammenhängende Graphen zerfällt; und für jede echte Untermenge $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{M}$, Γ durch Streichen aller Punkte aus $\mathfrak{M}'$ und aller mit diesen inzidenten Kanten in $q' < q$ Graphen zerfällt.

Vergleiche [3].

G. A. Dirac bewies: Jeder 4-chrome Graph enthält einen zum vollständigen 4-Graphen homöomorphen Teilgraphen [1].

Hier wird bewiesen:

Satz *1*: *Jeder 4-chrome kritische Graph Γ enthält zu jedem seiner Punkte P einen V-Graphen mit P als Verzweigungspunkt, welcher einen ungeraden Kreis enthält.*

Beweis: Bekanntlich ist ein kritischer 4-chromer Graph endlich, zusammenhängend, enthält keine Artikulation, und alle seine Punkte haben einen Grad $\geqq 3$. Siehe [1], [4] und [5]. Auch enthält Γ als 4-chromer Graph einen ungeraden Kreis [6]. Γ erfüllt also die Bedingungen von *2*, und es gibt daher durch jeden Punkt P von Γ einen ungeraden Kreis $\mathfrak{K}$. Da jeder Punkt von Γ von einem Grade $\geqq 3$ ist, gibt es nach *1* durch P eine Sehne $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$, deren anderen Endpunkt wir mit P_s bezeichnen. P und P_s teilen nun $\mathfrak{K}$ in zwei Bögen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Nun sind folgende Fälle denkbar:

a) Es gibt einen inneren Punkt P_k' von $\mathfrak{B}_1$ und einen inneren Punkt P_l' von $\mathfrak{B}_2$, so daß in Γ ein Weg von P_k' nach P_l' führt, welcher weder P noch P_s enthält.

b) Es gibt einen Weg, der weder P noch P_s enthält, und einen inneren Punkt P_k'' von $\mathfrak{B}_1$ mit einem inneren Punkt P_l'' von $\mathfrak{S}$ verbindet.

c) Es gibt einen Weg, der weder P noch P_s enthält, und einen inneren Punkt P_k''' von $\mathfrak{B}_2$ mit einem Punkt P_l''' von $\mathfrak{S}$ verbindet.

d) Oder aber es trifft weder a) noch b), noch c) zu.

Zu a): P' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k' \ldots P_l'$, der $\mathfrak{B}_1$ angehört, und Q' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P' auftritt und entweder auf $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{B}_2$ liegt; dann hat der Weg $P' \ldots Q'$ mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ außer seinen Endpunkten keinen Punkt und auch keine Kante gemein und bildet daher mit dem ungeraden Kreis $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ zusammen einen V-Graphen $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{K} + \mathfrak{S} + P' \ldots Q'$.

Zu b): P'' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k'' \ldots P_l''$, der $\mathfrak{B}_1$ angehört, und Q'' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P'' auftritt und entweder auf $\mathfrak{B}_2$ oder $\mathfrak{S}$ liegt; dann ist $\mathfrak{K} + \mathfrak{S} + P'' \ldots Q''$ ein V-Graph mit $\mathfrak{K}$ als ungeradem Kreis.

Zu c): P''' sei der letzte Punkt auf dem Wege $P_k''' \ldots P_l'''$, der $\mathfrak{B}_2$ angehört, und Q''' der erste Punkt auf diesem Wege, der nach P''' auftritt und entweder auf $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{S}$ liegt; so erhalten wir den V-Graphen $\mathfrak{K} + \mathfrak{S} + P''' \ldots Q'''$.

Zu d): Wir zeigen nun, daß dieser Fall nicht eintreten kann. Würde d) zutreffen, so müßten P und P_s ein Isthmoid bilden: 1. Als artikulationsloser Graph kann Γ nicht bei Streichung nur eines Punktes und aller mit ihm inzidenten Kanten zerfallen. 2. Da keine Doppelkanten zugelassen wurden, kann höchstens einer der Wege $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{S}$ aus nur einer einzigen Kante bestehen. Nach Streichung von P und P_s und der mit P und P_s inzidenten Kanten zerfiele Γ nach d) in mindestens zwei zusammenhängende Teilgraphen $\mathfrak{G}_i$ ($i=1, 2, \ldots, r$). Wir bilden nun die Graphen $\mathfrak{G}_i'$, indem wir zu den $\mathfrak{G}_i$ jeweils P und P_s und die Kanten aus Γ, die einen Punkt von $\mathfrak{G}_i$ mit P oder P_s verbinden, hinzufügen. Ist P mit P_s in Γ durch eine Kante verbunden, so bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{G}_0'(\Gamma = \mathfrak{G}_0' + \mathfrak{G}_1' + \ldots + \mathfrak{G}_r')$. Die $\mathfrak{G}_j'$ ($j=0, 1, \ldots, r$) haben paarweise genau die Punkte P, P_s gemein; und da sowohl den Bögen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ als auch der Sehne $\mathfrak{S}$ jeweils ein $\mathfrak{G}_j'$ entspricht, gibt es mindestens drei voneinander verschiedene Graphen $\mathfrak{G}_j'$.

Die $\mathfrak{G}_j'$ sind höchstens 3-chrom, da Γ kritisch 4-chrom ist. Es muß aber ein $\mathfrak{G}_k'$ geben, derart, daß P und P_s bei jeder Färbung von $\mathfrak{G}_k'$ mit drei Farben gleiche Farbe tragen müssen; und es muß auch ein $\mathfrak{G}_l'$ geben, derart, daß P und P_s bei jeder Färbung von $\mathfrak{G}_l'$ mit drei Farben verschiedene Farbe tragen müssen. Ansonsten könnte man durch geeignete Wahl der Farben stets erreichen, daß die Färbungen der $\mathfrak{G}_j'$ in P und P_s übereinstimmen, also Γ 3-chrom wäre. Dann ist aber schon der Graph $\mathfrak{G}_k' + \mathfrak{G}_l'$ 4-chrom, kann also kein echter Teilgraph des kritisch 4-chromen Graphen Γ sein. Weil Γ nach obigem mindestens drei ver-

schiedene $\mathfrak{G}_j'$ enthält, müßte $\mathfrak{G}_k' + \mathfrak{G}_i'$ im Widerspruch dazu echt in Γ enthalten sein.

Für die Diskussion des Falles d) vergleiche [3], Satz 3.

Es ist noch zu bemerken, daß Satz 1 auch für jeden punktkritischen Graphen gilt, da jeder punktkritische Graph einen kritischen Graphen mit denselben Punkten enthält.

G. A. Dirac bewies: Gegeben sei ein $k \geqq 6$ und ein $n \geqq 6.2^{[(k-6)/3]} + 2$ von derselben Parität wie k. Dann gibt es einen kritischen k-chromen Graphen der Ordnung n, welcher mehr als

$$^1/_4\, n^2 \sum_{i=0}^{[(k-6)/3]} (^1/_4)^i + A_k\, n$$

Kanten enthält. A_k ist eine allein von k abhängige Konstante und $[(k-6)/3]$ ist die größte ganze Zahl, die $(k-6)/3$ nicht übersteigt. Siehe [1].

Hier wird gezeigt:

Satz 2: *Für alle* $m \geqq 1$ *gibt es 4-chrome punktkritische Graphen der Ordnung* $n = 6\,m + 4$, *welche mehr als* $(n^2 + 5\,n)/6$ *Kanten besitzen.*

Beweis durch Konstruktion: Γ sei ein Graph, bestehend aus zwei zueinander fremden Kreisen der Länge $3\,m + 2$:

$$\mathfrak{K}_1 = P_1\, P_2 \ldots P_{3m+2}\, P_{3m+3} = P_1 \qquad (P_{3m+2+i} = P_i)$$

$$\mathfrak{K}_2 = Q_1\, Q_2 \ldots Q_{3m+2}\, Q_{3m+3} = Q_1 \qquad (Q_{3m+2+i} = Q_i)$$

und den Kanten $P_i\, Q_i$ und $P_{i+1}\, Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots 3\,m + 2)$.

Behauptung: Γ ist punktkritisch 4-chrom.

Beweis: Beginnen wir die Färbung von Γ bei einem beliebigen Punkt P_t (die Überlegungen für einen beliebigen Ausgangspunkt Q_t sind analog), indem wir P_t die Farbe I und P_{t+1} die Farbe II erteilen. Q_t erhält dann, wollten wir mit drei Farben auskommen, notwendig die Farbe III, Q_{t+1} die Farbe I, P_{t+2} die Farbe III usf. Allgemein erhalten alle Punkte

$$P_{t+3i} \quad \text{und} \quad Q_{t+1+3j} \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m \\ j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \quad \text{die Farbe I}$$

$$(T)\ P_{t+1+3i} \text{ und } Q_{t+2+3j} \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m \\ j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \quad \text{die Farbe II}$$

$$P_{t+2+3i} \text{ und } Q_{t+3j} \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ j = 0, 1, \ldots, m \end{pmatrix} \quad \text{die Farbe III}$$

Q_{t+1+3m} ist demnach durch eine Kante mit Punkten aller drei Farben

verbunden, muß also notwendig mit der Farbe IV gefärbt werden. Die so definierte Färbung wollen wir F_t nennen, die Färbung, die aus F_t entsteht, indem man die Farben von Q_{t+1+3m} und P_{t+1+3m} miteinander vertauscht, mit F_t' bezeichnen. Γ ist sogar punktkritisch 4-chrom, denn es gibt zu jedem Punkt aus Γ eine Färbung von Γ mit vier Farben, bei der er als einziger die Farbe IV trägt. Für jedes Q_s ist dies F_{s-1-3m} und für P_s die Färbung F'_{s-1-3m}.

Gibt es nun in Γ Punktepaare P_r, P_s, bzw. Q_r, Q_s oder P_r, Q_s, die nicht durch eine Kante verbunden sind, derart, daß bei jeder Färbung F_t und F_t' P_r und P_s (bzw. Q_r und Q_s oder P_r und Q_s) verschiedene Farbe tragen, so kann man die Kanten, die die Punkte dieser Paare verbinden, zu Γ hinzufügen ohne die Eigenschaft „punktkritisch 4-chrom" zu zerstören. Tun wir dies, so erhalten wir einen Graphen Γ' der Ordnung n. Für diesen berechnen wir die Anzahl der Kanten: P_r, P_s seien zwei beliebige, nicht benachbarte Punkte des Kreises $\mathfrak{K}_1$. Sie teilen $\mathfrak{K}_1$ in zwei Bögen $\mathfrak{B}_1$, mit der Länge $|r-s|$, und $\mathfrak{B}_2$ mit der Länge $3m+2-|r-s|$. P_r und P_s tragen bei der Färbung F_t wie auch F_t' nur dann gleiche Farbe, wenn die Länge des Bogens, auf dem die Kante $P_{t-1}P_t$ nicht liegt, durch 3 teilbar ist. Da die Kante $P_{t-1}P_t$ sowohl auf $\mathfrak{B}_1$, als auch auf $\mathfrak{B}_2$ liegen kann, kommen für jeden Punkt P_r nur solche Punkte P_s in Frage, für die weder $|r-s|$ noch $3m+2-|r-s|$ durch 3 teilbar ist. Dies ist der Fall für alle s, für die $|r-s| \equiv 1 \pmod 3$ ist; also, da die Kanten P_rP_s für benachbarte Punkte bereits in Γ liegt, $m-1$ mal. Dies für jeden Punkt von $\mathfrak{K}_1$ ausgeführt, ergibt einen Kantenzuwachs von $\frac{(3m+2)\,.\,(m-1)}{2}$ Kanten (denn jede Kante gehört zu zwei Punkten P_r und P_s). Ersetzt man in obiger Überlegung „P_r, P_s" durch „Q_r, Q_s", sowie „$P_{t-1}P_t$" durch „$Q_{t-2}Q_{t-1}$", so erhält man auch für $\mathfrak{K}_2$ einen Zuwachs von $\frac{(3m+2)\,.\,(m-1)}{2}$ Kanten.

Um festzustellen, welche der Kanten Q_rP_s hinzugefügt werden können, betrachten wir den Kreis $\mathfrak{K} = P_rQ_rP_{r+1}P_{r+2}\ldots P_{r-1}P_r$ der Länge $3m+3$. Man verifiziere mit Hilfe der Tabelle (T), daß für alle F_t und $F_t'(t \neq r+1)$ Q_r und P_s in F_t und F_t' nur dann gleich gefärbt sind, wenn die Länge des Bogens $Q_r \ldots P_s$ von $\mathfrak{K}$, der die Kante $P_{t-1}P_t$ nicht enthält, $\equiv 2 \pmod 3$ ist. Für den Sonderfall $t = r+1$, bei dem die Kante $P_{t-1}P_t$ von vornherein nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist, trägt $Q_r = Q_{t-1}$ bei der Färbung F_t die Farbe IV, die selbstverständlich von allen

Farben der P_i verschieden ist. Bei der Färbung F_t' haben laut Tabelle (T) $Q_r = Q_{t-1}$ und $P_{t+1+3i} = P_s$ die gleiche Farbe II. ($|r-s| \equiv 2 \pmod 3$). Da t wiederum alle Zahlen von 1 bis $3m+2$ durchläuft, muß sowohl $|r-s| \not\equiv 2 \pmod 3$ sein, wie auch $3m+3-|r-s| \equiv -|r-s| \not\equiv 2 \pmod 3$. Dies ist der Fall für alle s, für die $|r-s| \equiv 0 \pmod 3$ ist. Für jeden Punkt Q_r von $\mathfrak{R}_2$ erhalten wir also einen Kantenzuwachs von m Kanten, also insgesamt $(3m+2) \cdot m$ Kanten. Es gilt also:

Die Anzahl der Kanten von $\Gamma' = 2n + (3m+2) \cdot [(m-1)+m] = {}^1/_6 n^2 + {}^5/_6 n$.

Satz 3: *Für alle $m \geqq 1$ gibt es 5-chrome punktkritische Graphen der Ordnung $n = 6m+5$, für die die Anzahl der Kanten ${}^1/_6 n^2 + {}^3/_2 n - {}^5/_3$ beträgt.*

Beweis: Aus einem beliebigen punktkritischen Graphen Γ' des Satzes 2 bilden wir einen punktkritischen 5-chromen Graphen Γ'^*, indem wir zu Γ' einen weiteren Punkt Q hinzufügen, und mit diesem alle Punkte von Γ' verbinden. Γ'^* enthält dann ${}^1/_6 n^2 + {}^3/_2 n - {}^5/_3$ Kanten.

Ist p die minimale Zahl von der Beschaffenheit, daß sich ein Graph auf die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p zeichnen läßt, so daß sich die Kanten nicht überschneiden, so sagt man, der Graph habe das Geschlecht p [6].

Bedeutet n die Anzahl der Punkte und e die Anzahl der Kanten eines Graphen Δ und h die Zusammenhangszahl einer Fläche, auf welcher sich Δ ohne Überschneiden von Kanten zeichnen läßt, so gilt:

$$\frac{2e}{n} \leqq 6\left(1 + \frac{h-3}{n}\right)$$

vergleiche [4].

Wegen Satz 2 und der für geschlossene orientierbare Flächen gültigen Formel $h = 2p+1$ folgt aus dieser Beziehung, daß es zu jedem $A \geqq 0$ ein $p > A$ gibt, derart, daß 4-chrome punktkritische Graphen des Geschlechtes p existieren.

Aus Satz 3 folgt Analoges für 5-chrome punktkritische Graphen. Bedenkt man ferner, daß die Graphen Γ im Beweis des Satzes 2 punktkritische 4-chrome Graphen des Geschlechtes 0 waren; sowie, daß man durch Weglassen einer Kante das Geschlecht um höchstens 1 herabsetzen kann, so folgt, daß es zu jedem p punktkritische 4-chrome Graphen des Geschlechtes p gibt.

Die Graphen Γ^*, die wir aus den Graphen Γ bilden können, indem wir zu einem Γ einen Punkt Q hinzufügen und diesen mit allen Punkten von Γ verbinden, sind punktkritisch 5-chrom und haben das Geschlecht 1. Also gibt es zu jedem $p (p \neq 0)$ punktkritische 5-chrome Graphen des Geschlechtes p.

Es bleibt jedoch weiterhin unentschieden, ob es kritische 4- und 5-chrome Graphen beliebig hohen Geschlechtes gibt.

Literatur

[1] *G. A. Dirac*, "A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs", The Journal of the London Mathematical Society **27** (1952), Seite 85—92.

[2] *G. A. Dirac*, "Note on the colouring of graphs", Mathematische Zeitschrift **54** (1951), Seite 353 (13).

[3] *G. A. Dirac*, "The structure of k-chromatic graphs", Fundamenta Mathematica **40** (1953), Seite 47, 50 und 51.

[4] *G. A. Dirac*, "The colouring of maps", The Journal of the London Mathematical Society **28** (1953), Seite 477 und 478.

[5] *N. G. de Bruijn und P. Erdös*, "A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations", Proc. Konig. Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam, Ser. A **54** (1952), Seite 69.

[6] *D. König*, „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig 1936, Seite 170, Satz 12.

Topological Proofs for Certain Theorems on Matrices with Non-Negative Elements*

By

Ky Fan, Oak Ridge National Laboratory

(Received November 4, 1957)

1. A proof given by *Alexandroff* and *Hopf* [1, p. 480] for the *Perron-Frobenius* theorem is well-known and makes use of the *Brouwer* fixed point theorem. In the present paper, we shall see that several theorems on matrices with non-negative elements can be proved by using those elementary topological facts which are closely related to the *Brouwer* fixed point theorem.

We begin with the following result which is a matrix-free generalization of Theorem 2 below.

THEOREM 1. *Let S^n be an n-simplex and let $S_i^{n-1}(0 \leqslant i \leqslant n)$ be the $(n-1)$-dimensional faces of S^n. Let $f_i(0 \leqslant i \leqslant n)$ be $n+1$ real-valued continuous functions defined on S^n such that the following two conditions are satisfied*:

(a) *For any two indices i, j, we have $f_i(x) \leqslant f_j(x)$ for $x \in S_i^{n-1}$.*

(b) *For any ordered pair of points x, y of S^n, there is at least one index i for which $f_i(x) \leqslant f_i(y)$.*

Then:

(i) *There exists a point $\hat{x} \in S^n$ such that*

$$f_0(\hat{x}) = f_1(\hat{x}) = \ldots = f_n(\hat{x}). \tag{1}$$

(ii) *The equality*

$$\operatorname*{Min}_{x \in S^n} \operatorname*{Max}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x) = \operatorname*{Max}_{x \in S^n} \operatorname*{Min}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x) \tag{2}$$

holds.

(iii) *For any point $\hat{x} \in S^n$ satisfying* (1), *the common value of $f_i(\hat{x})$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ is equal to the common value in* (2).

---

* This paper was prepared while the author was working under a National Bureau of Standards contract with the American University.

Proof. Let

$$F_i = \{x \in S^n \mid f_i(x) = \operatorname*{Min}_{0 \leqq j \leqq n} f_j(x)\}, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Then F_i are closed subsets of S^n and $\bigcup_{i=0}^{n} F_i = S^n$. By (a), we have $S_i^{n-1} \subset F_i$. Let $U_i = S^n - F_i$. Then U_i are open in S^n and

$$\bigcap_{i=0}^{n} U_i = \varnothing; \qquad U_i \cap S_i^{n-1} = \varnothing, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n); \tag{3}$$

where $\varnothing$ denotes the empty set. Suppose, if possible, that $\bigcap_{i=0}^{n} F_i = \varnothing$, which means $\bigcup_{i=0}^{n} U_i = S^n$. Then we can find $n+1$ closed sets G_i such that $G_i \subset U_i$ and $\bigcup_{i=0}^{n} G_i = S^n$ (see, e.g. [1, p. 73]). In view of (3), we have

$$\bigcap_{i=0}^{n} G_i = \varnothing; \qquad G_i \cap S_i^{n-1} = \varnothing, \qquad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{4}$$

But by a well-known covering theorem of *Sperner* [21], the $n+1$ closed sets G_i covering S^n cannot satisfy all relations in (4). This proves $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \varnothing$. Any point $\hat{x} \in \bigcap_{i=0}^{n} F_i$ satisfies (1). Consider now a point $\hat{x} \in S^n$ satisfying (1), and let ϱ denote the common value of $f_i(\hat{x})$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$. By (b), we have

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x) \geqslant \varrho \geqslant \operatorname*{Min}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x) \qquad \text{for every } x \in S^n.$$

Therefore

$$\varrho = f_i(\hat{x}) = \operatorname*{Min}_{x \in S^n} \operatorname*{Max}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x),$$

$$\varrho = f_i(\hat{x}) = \operatorname*{Max}_{x \in S^n} \operatorname*{Min}_{0 \leqq i \leqq n} f_i(x);$$

which completes the proof.

The following well-known theorem is a special case of Theorem 1.

THEOREM 2. *If the elements of a square matrix $A = (a_{ij})$ of order n are all positive, then A has a positive eigenvalue λ with the following properties*:

(i) *Corresponding to the eigenvalue λ, there exists an eigenvector having all its components positive. λ is the only eigenvalue of A for which a corresponding eigenvector with non-negative components exists.*

(ii) $$\frac{1}{\lambda} = \operatorname*{Min}_{\substack{x_i \geqq 0 \\ \sum x_i = 1}} \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \operatorname*{Max}_{\substack{x_i \geqq 0 \\ \sum x_i = 1}} \operatorname*{Min}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}.$$

(iii) *λ is not less than the absolute value of any other eigenvalue of A.*

Proof. Consider an $(n-1)$-simplex S^{n-1}. Each point $x \in S^{n-1}$ has n barycentric coordinates $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ with $x_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. For each $i = 1, 2, \ldots, n$, let $S_i^{n-2} = \{x \in S^{n-1} \mid x_i = 0\}$, and let f_i be the function defined on S^{n-1} by

$$f_i(x) = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} \quad \text{for } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}.$$

Clearly condition (a) of Theorem 1 is satisfied. To verify condition (b) of Theorem 1 for two points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ of S^{n-1}, we need only consider the case where x is not on the boundary of S^{n-1}. In this case, we can find a point $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ on the boundary of S^{n-1} such that $x = \alpha z + \beta y$ with $\alpha \geqq 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$. Let i be an index such that $z_i = 0$. Then

$$f_i(x) = f_i(\alpha z + \beta y) = \frac{y_i}{\frac{\alpha}{\beta} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j} \leqq f_i(y).$$

Thus condition (b) of Theorem 1 is verified. By Theorem 1, there exists a point $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in S^{n-1}$ such that

$$\frac{\hat{x}_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{x}_j} = \varrho, \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{5}$$

$$\varrho = \operatorname*{Min}_{\substack{x_i \geqq 0 \\ \sum x_i = 1}} \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \operatorname*{Max}_{\substack{x_i \geqq 0 \\ \sum x_i = 1}} \operatorname*{Min}_{1 \leqq i \leqq n} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}. \tag{6}$$

Since $\hat{x}_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 1$, (5) implies $\hat{x}_i > 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ and $\varrho > 0$. Thus A has a positive eigenvalue $\lambda = 1/\varrho$ and a corresponding eigenvector $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ with all its components positive. By (6), λ has the extremal property (ii). By part (iii) of Theorem 1, λ is the only eigenvalue of A for which a corresponding eigenvector with non-negative com-

ponents exists. To prove that $\lambda \geqslant |\varkappa|$ for any eigenvalue $\varkappa$ of A, we may assume $\varkappa \neq 0$. Let $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ be an eigenvector of A corresponding to $\varkappa$. Then

$$|\varkappa| \cdot |u_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |u_j|, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

whence

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|u_i|}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |u_j|} \leqslant \frac{1}{|\varkappa|}.$$

Actually Theorem 2 is known to be valid for indecomposable matrices with non-negative elements. A square matrix A is said to be *indecomposable*, if it neither has the form $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ with square submatrices A_{11}, A_{22}, nor can be brought to this form by a permutation of the rows and the same permutation of the columns. The existence of a positive eigenvalue λ with properties (i), (iii) was first proved by *Perron* [17] for matrices with positive elements, and then generalized by *Frobenius* [8] to indecomposable matrices with non-negative elements. Part (ii) of Theorem 2 was proved by *Wielandt* [24] for indecomposable matrices with non-negative elements. For other proofs of Theorem 2, see *Ullman* [23], *Debreu* and *Herstein* [3], *Householder* [11], *Samelson* [19], *Brauer* [2].

By continuity argument, Theorem 2 implies the following: Every matrix A of order n with non-negative elements has a real non-negative eigenvalue λ, which is not less than the absolute value of any other eigenvalue of A. Corresponding to λ, there exists an eigenvector with non-negative components. This eigenvalue λ will be called the *maximal eigenvalue* of A.

2. In the proof of the following result of *Frobenius* [7], we shall use again *Sperner*'s theorem.

THEOREM 3. *Let $A=(a_{ij})$ be a matrix of order n with positive elements, and let λ be its maximal eigenvalue. If $\varrho > \lambda$, then the inverse matrix $(\varrho I - A)^{-1}$ has all its elements positive.*

Here, as elsewhere, I denotes the identity matrix of order n.

Proof. Since λ is also the maximal eigenvalue of the transposed matrix of A, there exists a vector $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ such that

$$u_j > 0, \qquad \lambda u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{7}$$

Consider the matrix $C = (c_{ij})$ defined by

$$c_{ij} = \frac{\varrho\,\delta_{ij} - a_{ij}}{\varrho - \lambda}\,\frac{u_i}{u_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{8}$$

where δ_{ij} is the *Kronecker* symbol. Using (7), one verifies that $c_{ij} < 0$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1$ for all j. Let S^{n-1} be an $(n-1)$-simplex. As in the proof of Theorem 2, the barycentric coordinates of a point $x \in S^{n-1}$ will be denoted by $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Let

$$S_i^{n-2} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_i = 0\},$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. Let $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_j$ for $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$. We first prove the following statement:

For any given $y_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ with $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$, there exists a

$$\text{point } x \in S^{n-1} \text{ such that } f_i(x) = y_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{9}$$

Consider the closed sets $F_i = \{x \in S^{n-1} \mid f_i(x) \geqslant y_i\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Since $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1$, we have $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$ for every $x \in S^{n-1}$, and therefore $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = S^{n-1}$. As $c_{ij} < 0$ $(i \neq j)$, we have $f_i(x) < 0 \leqslant y_i$ for $x \in S_i^{n-2}$, and consequently $F_i \cap S_i^{n-2} = \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Then, by *Sperner*'s theorem, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$. Again since $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i$, every point $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ satisfies $f_i(x) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. This proves (9). Clearly, (9) implies that the inverse matrix $C^{-1} = (d_{ij})$ exists, $d_{ij} \geqslant 0$ for all i, j, and $\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Actually, we have all $d_{ij} > 0$. Indeed, if we had $d_{j_0 k_0} = 0$ for some indices j_0, k_0, then we would have

$$0 \leqslant \delta_{j_0 k_0} = \sum_{j=1}^{n} c_{j_0 j}\, d_{j k_0} = \sum_{j \neq j_0} c_{j_0 j}\, d_{j k_0} < 0.$$

By (8), the relation $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, d_{jk} = \delta_{ik}$ can be written

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varrho\,\delta_{ij} - a_{ij}}{\varrho - \lambda}\,\frac{d_{jk}}{u_j} = \frac{\delta_{ik}}{u_i} = \frac{\delta_{ik}}{u_k}$$

or

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\varrho\,\delta_{ij} - a_{ij}}{\varrho - \lambda} \frac{u_k}{u_j} d_{jk} = \delta_{ik}.$$

Hence the inverse matrix $(\varrho I - A)^{-1} = (b_{ij})$ is given by

$$b_{ij} = \frac{d_{ij}}{\varrho - \lambda} \frac{u_j}{u_i} > 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n),$$

which proves the theorem.

3. Our proof of Theorem 4 requires the following lemma.

LEMMA 1. *Let $C = (c_{ij})$ be a real matrix of order n satisfying the following three conditions*:

(a) $c_{ij} \geqslant 0 \qquad (i \neq j;\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$,

(c) *For any $n-1$ non-negative numbers $x_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$, not all zero, there is at least one index i between 1 and $n-1$ such that* $\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_j < 0$.

If C is non-singular, then in the inverse matrix $C^{-1} = (d_{ij})$, we have $d_{nn} > 0$.

Proof. Consider an $(n-1)$-simplex S^{n-1}, whose vertices will be denoted by $v_1, v_2, \ldots, v_n$. For $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$, the $(k-1)$-dimensional face of S^{n-1} spanned by the vertices $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}$ will be denoted by $v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_k}$. The barycentric coordinates of a point $x \in S^{n-1}$ will be again denoted by $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. In particular, $v_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ldots, v_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Let

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

for $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$. Conditions (a), (c) together imply $c_{ii} < 0$ for $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Conditions (a), (b) imply $c_{nn} \leqslant 1$. Thus

$$f_i(v_i) < 0 \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n-1; \qquad f_n(v_n) \leqslant 1. \tag{10}$$

By (a), we have

$$f_i(x) \geqslant 0 \text{ for } x \in v_1 \ldots v_{i-1} v_{i+1} \ldots v_n \text{ and } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Hence

For $x \in v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_k}$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n)$, we have

$$f_i(x) \geqslant 0 \text{ for } i \neq j_1, j_2, \ldots, j_k. \tag{11}$$

Now, consider the n closed sets F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ defined by

$$F_i = \{x \in S^{n-1} \mid f_i(x) \leqslant 0\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$
$$F_n = \{x \in S^{n-1} \mid f_n(x) \leqslant 1\}.$$

We claim that for $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$:

$$v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_k} \subset F_{j_1} \cup F_{j_2} \cup \ldots \cup F_{j_k}. \tag{12}$$

The case $k = 1$ of (12) follows from (10). For $k > 1$, we shall discuss two separate cases according to whether $j_k \leqslant n-1$ or $j_k = n$.

Let $x \in v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_k}$, where $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n-1$. By (c), there is one index i such that $1 \leqslant i \leqslant n-1$ and $f_i(x) < 0$. By (11), this index i must be one of $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Hence $x \in F_{j_1} \cup F_{j_2} \cup \ldots \cup F_{j_k}$.

Next, let $x \in v_{j_1} v_{j_2} \ldots v_{j_k}$, where $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k = n$. By (11), $f_i(x) \geqslant 0$ for $i \neq j_1, j_2, \ldots, j_k$. If $x \notin F_{j_1} \cup F_{j_2} \cup \ldots \cup F_{j_{k-1}}$, the we have also $f_i(x) > 0$ for $i = j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$. In other words, $f_i(x) \geqslant 0$ for all $i \neq n$. Since (b) implies $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, it follows that $f_n(x) \leqslant 1$ and $x \in F_n = F_{j_k}$. Thus (12) is proved.

By a theorem of *Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz* [14], the n closed subsets F_i of S^{n-1} having property (12) must have a point in common. Because $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$, every point $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ satisfies $f_i(x) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $f_n(x) = 1$. Thus there exist n numbers $\hat{x}_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ such that $\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j = 1$ and

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \hat{x}_j = \begin{cases} 0 \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ 1 \text{ for } i = n. \end{cases} \tag{13}$$

In view of (c), (13) implies that $\hat{x}_n > 0$. Finally, if C is non-singular, then (13) asserts that $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ are the successive elements in the n-th column of $C^{-1} = (d_{ij})$. Hence $d_{nn} = \hat{x}_n > 0$.

For any matrix M of order n, and for any indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, we shall denote by $M(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ the principal submatrix (not minor!) of M formed by rows and columns with indices $i_1, i_2, \ldots, i_k$. The corresponding principal minor will be denoted by $\det M(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. The n principal minors $\det M(1, 2, \ldots, k)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, will be called the *leading principal minors* of M.

THEOREM 4. *Let $A = (a_{ij})$ be a matrix of order n with non-negative elements, let $A' = A(1, 2, \ldots, n-1)$. Let λ, λ' denote the maximal eigenvalues of A, A' respectively. If $\varrho > \lambda'$ and $\det(\varrho I - A) > 0$, then $\varrho > \lambda$.*

Proof. The conclusion means that $\lambda > \varrho > \lambda'$ implies $\det(\varrho I - A) \leqslant 0$. By reason of continuity, it suffices to consider the case where all elements of A are positive. Thus, we assume all $a_{ij} > 0$, $\lambda > \varrho > \lambda'$ and $\det(\varrho I - A) \neq 0$. Under these assumptions, we shall show that $\det(\varrho I - A) < 0$.

Since λ is also the maximal eigenvalue of the transposed matrix of A, there exists a vector $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ satisfying (7). Consider the matrix $C = (c_{ij})$ of order n defined by (8). From $\lambda > \varrho$ and (7), one verifies that C satisfies conditions (a), (b) of Lemma 1. If we denote by $U' = \operatorname{diag}\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ the diagonal matrix of order $n-1$, then the (i, j)-th element of $U' A' U'^{-1}$ is $a_{ij} \dfrac{u_i}{u_j} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1,$ $1 \leqslant j \leqslant n-1)$; and λ' is the maximal eigenvalue of $U' A' U'^{-1}$. By part (ii) of Theorem 2, for any $n-1$ numbers $x_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ with $\sum_{j=1}^{n-1} x_j = 1$, there exists an index i such that $1 \leqslant i \leqslant n-1$ and

$$\frac{1}{\lambda'} \leqslant \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \dfrac{u_i}{u_j} x_j}.$$

Then, for this index i, we have $x_i > 0$ and

$$\varrho x_i > \lambda' x_i \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{u_i}{u_j} x_j$$

or

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\varrho \delta_{ij} - a_{ij}) \frac{u_i}{u_j} x_j > 0.$$

This fact combined with $\lambda > \varrho$ shows that C satisfies condition (c) of Lemma 1.

Let $C' = C(1, 2, \ldots, n-1)$ and let I' denote the identity matrix of order $n-1$. Then by definition (8) of C,

$$\det C' = \frac{\det(\varrho I' - A')}{(\varrho - \lambda)^{n-1}}, \quad \det C = \frac{\det(\varrho I - A)}{(\varrho - \lambda)^n}.$$

As we assume $\det(\varrho I - A) \neq 0$, C is non-singular. Then by Lemma 1,

we have $\dfrac{\det C'}{\det C} > 0$ or $\dfrac{\det(\varrho I' - A')}{\det(\varrho I - A)} < 0$. Finally, since $\varrho > \lambda'$, all eigenvalues of $\varrho I' - A'$ have positive real parts, and the non-real ones appear in complex conjugate pairs, so $\det(\varrho I' - A') > 0$. Hence $\det(\varrho I - A) < 0$.

4. From Theorems 3 and 4, we can easily derive

THEOREM 5. *Let $A = (a_{ij})$ be a matrix of order n with non-negative elements, and let λ be its maximal eigenvalue. Then for a real number ϱ, the following conditions are all equivalent:*

(a) $\varrho > \lambda$.

(b) *$\varrho I - A$ is non-singular. In the inverse matrix $(\varrho I - A)^{-1} = (b_{ij})$, all elements b_{ij} are non-negative.*

(c) *There exist n positive numbers $u_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ such that* $\varrho u_i > \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(d) $\varrho > a_{ii}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *For any singular matrix $M = (m_{ij})$ of order n* (with real or complex elements) *satisfying $|m_{ij}| \leqslant a_{ij}$ $(i \neq j;\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, there exist two distinct indices i, j such that $|m_{ii}| \cdot |m_{jj}| < (\varrho - a_{ii})(\varrho - a_{jj})$.*

(e) *For any singular matrix $M = (m_{ij})$ of order n* (with real or complex elements) *satisfying $|m_{ij}| \leqslant a_{ij}$ $(i \neq j;\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, there exists an index i such that $|m_{ii}| < \varrho - a_{ii}$.*

(f) *All principal minors of $\varrho I - A$ are positive.*

(g) *The leading principal minors of $\varrho I - A$ are positive.*

Proof. We shall prove the following implications:

(a) → (b) → (c) → (d) → (e) → (a), (a) → (f) → (g) → (a).

(a) → (b): By continuity argument, it is clear from Theorem 3 that all $b_{ij} \geqslant 0$.

(b) → (c): Take n arbitrary positive numbers $v_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ and let $u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Since each row in (b_{ij}) contains at least one positive element, so we have $u_i > 0$ and

$$\varrho u_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{n} (\varrho \delta_{ij} - a_{ij}) u_j = v_i > 0.$$

(c) → (d): First from $u_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ and $\varrho u_i > \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, we have $\varrho > a_{ii}$. Let $M = (m_{ij})$ be a singular matrix of

order n such that $|m_{ij}| \leqslant a_{ij}$ $(i \neq j;\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. There exist n numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, not all zero, such that $\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. (Here $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are real or complex according to whether the elements of M are real or complex.) Let $y_j = \dfrac{x_j}{u_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ and let i_1, i_2 be two distinct indices such that $|y_{i_1}| \geqslant |y_{i_2}| \geqslant \operatorname{Max}_{j \neq i_1, i_2} |y_j|$. Then $|y_{i_1}| > 0$. Since $-m_{ii} u_i y_i = \sum_{j \neq i} m_{ij} u_j y_j$ and $|m_{ij}| \leqslant a_{ij}$ $(i \neq j)$, we have

$$|m_{ii}|\, u_i\, |y_i| \leqslant \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j |y_j| \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{14}$$

If $y_{i_2} = 0$, we have $y_j = 0$ for all $j \neq i_1$ and by (14), $m_{i_1 i_1} = 0$. So in this case, we have $0 = |m_{i_1 i_1}| \cdot |m_{jj}| < (\varrho - a_{i_1 i_1})(\varrho - a_{jj})$ for any j. If $y_{i_2} \neq 0$, then by (14),

$$|m_{i_1 i_1}| \cdot u_{i_1} \cdot |y_{i_1}| \leqslant |y_{i_2}| \cdot \sum_{j \neq i_1} a_{i_1 j} u_j < |y_{i_2}| \cdot (\varrho - a_{i_1 i_1})\, u_{i_1},$$

$$|m_{i_2 i_2}| \cdot u_{i_2} \cdot |y_{i_2}| \leqslant |y_{i_1}| \cdot \sum_{j \neq i_2} a_{i_2 j} u_j < |y_{i_1}| (\varrho - a_{i_2 i_2})\, u_{i_2}$$

and consequently $|m_{i_1 i_1}| \cdot |m_{i_2 i_2}| < (\varrho - a_{i_1 i_1})(\varrho - a_{i_2 i_2})$.

(d) $\rightarrow$ (e) is trivial.

(e) $\rightarrow$ (a): The singular matrix $M = \lambda I - A = (m_{ij})$ satisfies $|m_{ij}| = a_{ij}$ $(i \neq j)$. For at least one index i, we have $|\lambda - a_{ii}| = |m_{ii}| < \varrho - a_{ii}$. Hence $\varrho > \lambda$.

(a) $\rightarrow$ (f): Let $(\varrho I - A)^{-1} = (b_{ij})$. As (a) $\rightarrow$ (b) is already proved, all $b_{ij} \geqslant 0$. Since $\sum_{j=1}^{n} (\varrho \delta_{ij} - a_{ij})\, b_{ji} = 1$, we have $b_{ii} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. By the reason used in the last part of the proof of Theorem 4, $\varrho > \lambda$ implies $\det(\varrho I - A) > 0$. It follows that all $(n-1)$-rowed principal minors $\det[(\varrho I - A)(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)] = b_{ii} \det(\varrho I - A)$ of $\varrho I - A$ are positive. To derive from this result the positiveness of the principal minors of lower orders of $\varrho I - A$, it suffices to observe that the maximal eigenvalue of $A(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ is $\leqslant \lambda$, which follows from the fact that $\det[(\varrho I - A)(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)] > 0$ holds for all $\varrho > \lambda$.

(f) $\rightarrow$ (g) is trivial.

(g) $\rightarrow$ (a): By Theorem 4, the inequalities $\det[(\varrho I - A)(1)] > 0$ and $\det[(\varrho I - A)(1, 2)] > 0$ imply that ϱ is greater than the maximal eigenvalue of $A(1, 2)$. Then the inequality $\det[(\varrho I - A)(1, 2, 3)] > 0$ implies that ϱ is greater than the maximal eigenvalue of $A(1, 2, 3)$. Continuing this argument, we finally obtain $\varrho > \lambda$. This completes the proof of Theorem 5.

Relations (a) $\leftrightarrow$ (b) and (a) $\rightarrow$ (f) are well-known and due to *Frobenius* [7], [8]. *Ostrowski* [15] proved (f) $\rightarrow$ (b), (f) $\rightarrow$ (c). (For (f) $\rightarrow$ (b), see also *Goheen* [10], *Egerváry* [4].) Also (f) $\rightarrow$ (e) is contained in a result of *Ostrowski* [15], which is stated below as Theorem 8. The equivalence (a) $\leftrightarrow$ (c) has been given by *Schneider* [20] and *Wong* [25]. The equivalence (f) $\leftrightarrow$ (g) is due to *Kotelyanskiĭ* whose proof can be found in *Gantmaher*'s book [9, p. 338]. The implication (a) $\rightarrow$ (d) is closely related to *Brauer*'s result [2] that every eigenvalue of A lies in the oval $|z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leqslant (\lambda - a_{ii})(\lambda - a_{jj})$, where a_{ii}, a_{jj} are the two smallest diagonal elements. Parts of Theorem 5 (and Theorem 5′ below) have been independently discovered by economists. We refer to *Debreu-Herstein* [3] for economic literature.

The following classical result of *Frobenius* [7] is an immediate consequence of the equivalence (a) $\leftrightarrow$ (c):

COROLLARY 1. *If* $a_{ij} \geqslant a'_{ij} \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ *and if* λ, λ' *are respectively the maximal eigenvalues of* $A = (a_{ij})$ *and* $A' = (a'_{ij})$, *then* $\lambda \geqslant \lambda'$.

From Theorem 5, it is easily seen that the converse of Theorem 4 is also true.

Let $C = (c_{ij})$ be a real matrix of order n with $c_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j; 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$, and let $A = \varrho I - C$, where $\varrho \geqslant \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} c_{ii}$. Then all elements of A are non-negative. Clearly ϱ is greater than the maximal eigenvalue of A, if and only if all eigenvalues of C have positive real parts. Therefore Theorem 5 and Theorem 4 (together with its converse) can be restated in the following form.

THEOREM 5′. *For a real matrix* $C = (c_{ij})$ *of order* n *with* $c_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j; 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$, *the following conditions are all equivalent*:

(a) *All eigenvalues of* C *have positive real parts.*

(b) C *is non-singular. All elements of the inverse matrix* C^{-1} *are non-negative.*

(c) *There exist* n *positive numbers* $u_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *such that* $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} u_j > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

(d) $c_{ii} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *For any singular matrix* $M = (m_{ij})$ *of order* n (with real or complex elements) *satisfying* $|m_{ij}| \leqslant -c_{ij}$ $(i \neq j;$ $1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant n)$, *there exist two distinct indices* i, j *such that* $|m_{ii}| \cdot |m_{jj}| < c_{ii} c_{jj}$.

(e) *For any singular matrix* $M = (m_{ij})$ *of order* n (with real or complex elements) *satisfying* $|m_{ij}| \leqslant -c_{ij}$ $(i \neq j;$ $1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant n)$, *there exists an index* i *such that* $|m_{ii}| < c_{ii}$.

(f) *All principal minors of* C *are positive.*

(g) *The leading principal minors of* C *are positive.*

(h) *All eigenvalues of the submatrix* $C(1, 2, \ldots, n-1)$ *have positive real parts, and* $\det C > 0$.

5. We turn now to the following result, the proof of which again uses *Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz*'s theorem.

THEOREM 6. *Let* $C=(c_{ij})$ *be a real matrix of order* n *satisfying the following three conditions*:

(a) $c_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j;$ $1 \leqslant i \leqslant n,$ $1 \leqslant j \leqslant n)$.

(b) *There exist* n *positive numbers* γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *such that* $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_{ij} > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

(c) *For every fixed index* k *between* 1 *and* n, *there exist* $n-1$ *positive numbers* $\gamma_i^{(k)}$ $(i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ *such that* $\sum_{i \neq k} \gamma_i^{(k)} c_{ij} < 0$ *for* $j \neq k$.

Then C *is non-singular, all elements of* C^{-1} *are positive. Furthermore, exactly one of the eigenvalues of* C *is real and positive.*

Proof. Let $\delta_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_{ij} > 0$. Define the matrix $C' = (c'_{ij})$ of order n by $c'_{ij} = \dfrac{\gamma_i c_{ij}}{\delta_j}$. Then $c'_{ij} \geqslant 0$ for $i \neq j$, and $\sum_{i=1}^{n} c'_{ij} = 1 (1 \leqslant j \leqslant n)$. For every fixed index k and for any $n-1$ non-negative numbers $x_j^{(k)}$ $(j=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$, not all zero, the relation

$$\sum_{i \neq k} \left[\frac{\gamma_i^{(k)}}{\gamma_i} \sum_{j \neq k} c'_{ij} x_j^{(k)} \right] = \sum_{j \neq k} \left[\frac{x_j^{(k)}}{\delta_j} \sum_{i \neq k} \gamma_i^{(k)} c_{ij} \right] < 0$$

shows that $\sum_{j \neq k} c'_{ij} x_j^{(k)} < 0$ for at least one index $i \neq k$. Thus the same reasoning used in the proof of Lemma 1 can be applied to the matrix C'.

For any fixed k, there exist n numbers $d'_{jk} \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ such that $\sum_{j=1}^{n} d'_{jk} = 1$ and $\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}\, d'_{jk} = \delta_{ik}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Furthermore, we have all $d'_{jk} > 0$. Indeed, if we had $d'_{hk} = 0$ for some indices h, k, we would have

$$0 \leqslant \sum_{i \neq h} \frac{\gamma_i^{(h)}}{\gamma_i}\, \delta_{ik} = \sum_{i \neq h} \left[\frac{\gamma_i^{(h)}}{\gamma_i} \sum_{j \neq h} c'_{ij}\, d'_{jk} \right] = \sum_{j \neq h} \left[\frac{d'_{jk}}{\delta_j} \sum_{i \neq h} \gamma_i^{(h)}\, c_{ij} \right] < 0.$$

This shows that C'^{-1} exists and all its elements are positive. Consequently C^{-1} exists and all its elements are positive.

Let $\varrho = \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} | c_{ii} |$. Then all elements of $C + \varrho I$ are non-negative. By considering the maximal eigenvalue of the matrix C^{-1}, whose elements are positive, we infer that C has a positive eigenvalue μ such that all eigenvalues of C are contained in the closed region $| z | \geqslant \mu$ in the complex z-plane. Furthermore μ^{-1} is the only eigenvalue of C^{-1} for which a corresponding eigenvector with non-negative components exists. Hence $\mu + \varrho$ is the only eigenvalue of $C + \varrho I$ for which a corresponding eigenvector with non-negative components exists. It follows that $\mu + \varrho$ is the maximal eigenvalue of $C + \varrho I$. Therefore all eigenvalues of C are contained in the circular disk $| z + \varrho | \leqslant \mu + \varrho$. But μ is the only positive number z satisfying $| z | \geqslant \mu$ and $| z + \varrho | \leqslant \mu + \varrho$, so μ is the only positive eigenvalue of C.

It can be shown [5, p. 114] that condition (c) in Theorem 6 is equivalent to the following:

(c′) *For every fixed index k between* 1 *and* n, *and for any* $n - 1$ *non-negative numbers* $x_j^{(k)}$ $(j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$, *not all zero, there is at least one index* $i \neq k$ *such that* $\sum_{j \neq k} c_{ij}\, x_j^{(k)} < 0$.

According to Theorem 5′, condition (c) in Theorem 6 can also be replaced by the following:

(c″) *For every k, all eigenvalues of the principal submatrix $C(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ of order $n - 1$ have negative real parts.*

THEOREM 7. *Let $A = (a_{ij})$ be a matrix of order n with non-negative elements, let λ be its maximal eigenvalue, and $\alpha = \operatorname{Min}_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}$. Let β denote the largest among the maximal eigenvalues of the principal submatrices $A(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, of order $n - 1$ (therefore $\lambda \geqslant \beta \geqslant \alpha$). Then:*

(i) *Every eigenvalue of A is contained in the closed region in the complex z-plane characterized by $| z - \alpha | \leqslant \lambda - \alpha$ and $| z - \beta | \geqslant \lambda - \beta$.*

(ii) *If $\lambda > \beta$, then for any ϱ satisfying $\lambda > \varrho > \beta$, $A - \varrho I$ is non-singular, and all elements of $(A - \varrho I)^{-1}$ are positive.*

That every eigenvalue of A lies in $|z - \alpha| \leqslant \lambda - \alpha$ was first noticed by *Fréchet* [6, p. 106] for stochastic matrices.

Proof. Since $\lambda - \alpha$ is the maximal eigenvalue of $A - \alpha I$, whose elements are non-negative, so every eigenvalue of $A - \alpha I$ is contained in $|z| \leqslant \lambda - \alpha$. Therefore every eigenvalue of A is contained in $|z - \alpha| \leqslant \lambda - \alpha$. To prove that all eigenvalues of A lie in the closed region $|z - \beta| \geqslant \lambda - \beta$, we need only consider the case $\lambda > \beta$. We shall show this after proving (ii).

Assume $\lambda > \beta$ and consider a ϱ such that $\lambda > \varrho > \beta$. Clearly $\lambda > \beta$ implies that A is indecomposable. As Theorem 2 is valid for indecomposable matrices with non-negative elements, there exists a vector $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ such that $\gamma_j > 0$ and $\lambda\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\gamma_i (1 \leqslant j \leqslant n)$. Let $C = A - \varrho I = (c_{ij})$. Then $c_{ij} \geqslant 0$ for $i \neq j$, and $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_{ij} = (\lambda - \varrho)\gamma_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. For each k, the maximal eigenvalue of $A(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ is $\leqslant \beta < \varrho$. Therefore all eigenvalues of $C(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$ have negative real parts. Thus $C = A - \varrho I$ satisfies conditions (a), (b), (c″) of Theorem 6. Consequently $(A - \varrho I)^{-1}$ exists and all its elements are positive. Also by Theorem 6, $\lambda - \varrho$ is the only positive eigenvalue of $A - \varrho I$. Then $(\lambda - \varrho)^{-1}$ is the maximal eigenvalue of $(A - \varrho I)^{-1}$. Therefore every eigenvalue of $A - \varrho I$ lies in $|z| \geqslant \lambda - \varrho$. In other words, every eigenvalue of A is contained in $|z - \varrho| \geqslant \lambda - \varrho$. Since this is true for every ϱ satisfying $\lambda > \varrho > \beta$, all eigenvalues of A must be in $|z - \beta| \geqslant \lambda - \beta$.

6. The following lemma is intuitively clear.

LEMMA 2. *Let $u_i \geqslant 0, s_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, and let R, F_i, G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ be the sets in the Euclidean n-space E^n defined by*

$$R = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \mid |x_i| \leqslant u_i \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$F_i = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \mid x_i = -u_i\},$$

$$G_i = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \mid x_i = u_i\}.$$

If n real-valued continuous functions $f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ defined on R are such that

$$f_i(x) \leqslant -s_i \quad \text{for } x \in F_i, \tag{15}$$

$$f_i(x) \geqslant s_i \quad \text{for } x \in G_i, \tag{16}$$

then for any n real numbers t_i with $|t_i| \leqslant s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, there exists a point $x \in R$ such that

$$f_i(x) = t_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{17}$$

Proof. We may assume $u_i > 0$ for all i. In fact, if $u_{i_0} = 0$ for some index i_0, then $F_{i_0} = G_{i_0} = R$ and by (15), (16), we have necessarily $s_{i_0} = 0$ and $f_{i_0}(x) = 0 = t_{i_0}$ for $x \in R$. Thus we need only consider the remaining $n - 1$ functions f_i with $i \neq i_0$ and regard them as functions of $n - 1$ variables x_i with $i \neq i_0$. We assume henceforth all $u_i > 0$.

Consider first the case where $|t_i| < s_i$ for all i. Let

$$T_i = \{x \in R \mid f_i(x) = t_i\},$$
$$U_i = \{x \in R \mid f_i(x) < t_i\},$$
$$V_i = \{x \in R \mid f_i(x) > t_i\}.$$

Then U_i and V_i are disjoint open subsets of R, $R - T_i = U_i \cup V_i$, and $F_i \subset U_i$, $G_i \subset V_i$. Thus, for each $i = 1, 2, \ldots, n$, the closed set T_i separates the two opposite faces F_i, G_i of R. According to a known result equivalent to the *Brouwer* fixed point theorem (see *Hurewicz-Wallman* [12, p. 40]), this implies $\bigcap_{i=1}^{n} T_i \neq \varnothing$ and therefore the existence of an $x \in R$ satisfying (17).

Consider now the general case $s_i \geqslant 0$, $|t_i| \leqslant s_i$. For each positive integer k, we define n functions $f_i^{(k)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ on R by $f_i^{(k)}(x) = f_i(x) + \dfrac{x_i}{k u_i}$ for $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Let $s_i^{(k)} = s_i + \dfrac{1}{k}$. Then we have $f_i^{(k)}(x) \leqslant -s_i^{(k)}$ for $x \in F_i$, and $f_i^{(k)}(x) \geqslant s_i^{(k)}$ for $x \in G_i$. Since $|t_i| \leqslant s_i < s_i^{(k)}$, the result just proved assures the existence of a point $x^{(k)} \in R$ satisfying $f_i^{(k)}(x^{(k)}) = t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Then the limit point x of any convergent subsequence of $\{x^{(k)}\}$ will satisfy (17).

Lemma 2 is the topological reason behind the following theorem of *Ostrowski* [15]:

THEOREM 8. *Let $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ be two real matrices of order n such that*

$$a_{ij} \leqslant 0 \text{ for } i \neq j; \quad \det A(1, 2, \ldots, k) > 0, \ (1 \leqslant k \leqslant n); \tag{18}$$

$$|b_{ij}| \leqslant -a_{ij} \text{ for } i \neq j; \quad |b_{ii}| \geqslant a_{ii}, \ (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{19}$$

Then B is non-singular and the elements of the inverse matrices $A^{-1} = (u_{ij})$, $B^{-1} = (v_{ij})$ satisfy the inequalities

$$|v_{ij}| \leqslant u_{ij} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{20}$$

Furthermore, we have

$$|\det B| \geqslant \det A. \tag{21}$$

In *Ostrowski*'s original statement of this theorem, the matrix B may be real or complex. Instead of $\det A(1, 2, \ldots, k) > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, he assumed that all principal minors of A are positive. A result closely related to Theorem 8 has been given by *Janet* [13, p. 139].

Proof. First, by Theorem 5′, (18) implies $u_{ij} \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ and $a_{ii} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. The last inequality combined with (19) implies $b_{ii} \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Consider a fixed index k between 1 and n, and let

$$R = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \mid |x_i| \leqslant u_{ik} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$F_i = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \mid x_i = -u_{ik}\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$G_i = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \mid x_i = u_{ik}\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Let

$$s_i = \delta_{ik}, \qquad t_i = \delta_{ik} \operatorname{sgn} b_{ii} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

and

$$f_i(x) = (\operatorname{sgn} b_{ii}) \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \text{ for } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Using (19) and $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jk} = \delta_{ik}$, one verifies that $f_i(x) \leqslant -s_i$ for $x \in F_i$, and $f_i(x) \geqslant s_i$ for $x \in G_i$. By Lemma 2, there exists a point $x \in R$ such that $f_i(x) = t_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Since $b_{ii} \neq 0$, this means the existence of n real numbers v_{jk} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ satisfying $|v_{jk}| \leqslant u_{jk}$ and $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_{jk} = \delta_{ik}$. Hence $B^{-1} = (v_{ij})$ exists and satisfies (20). The inequality $|v_{nn}| \leqslant u_{nn}$ can be written

$$\frac{|\det B|}{\det A} \geqslant \frac{|\det B(1, 2, \ldots, n-1)|}{\det A(1, 2, \ldots, n-1)}. \tag{22}$$

For any positive integer $k \leqslant n$, the two matrices $A(1, 2, \ldots, k)$ and $B(1, 2, \ldots, k)$ obviously satisfy the hypothesis of the present theorem for matrices of order k. So according to (22), we have

$$\frac{|\det B(1, 2, \ldots, k)|}{\det A(1, 2, \ldots, k)} \geqslant \frac{|\det B(1, 2, \ldots, k-1)|}{\det A(1, 2, \ldots, k-1)}.$$

Therefore

$$\frac{|\det B|}{\det A} \geqslant \frac{|b_{11}|}{a_{11}} \geqslant 1.$$

COROLLARY 2. *If a real matrix* $A = (a_{ij})$ *of order* n *satisfies condition* (18), *then for* $1 \leqslant k < n$:

$$\det A \leqslant \det A(1, 2, \ldots, k) \cdot \det A(k+1, k+2, \ldots, n). \tag{23}$$

Proof. Apply (21) to the matrix $B = (b_{ij})$ defined by

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ if } \operatorname{Min}(i, j) \leqslant k < \operatorname{Max}(i, j), \\ a_{ij}, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

7. As another application of Lemma 2, we include the following result.

THEOREM 9. *Let* $B = (b_{ij})$ *be a matrix of order* n *with real elements. Let*

$$\sigma_i = |b_{ii}| - \sum_{j \neq i} |b_{ij}|, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{24}$$

$$\tau_i = |b_{ii}| - \sum_{j > i} |b_{ij}|, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{25}$$

If B *has dominant diagonal*, i. e. *if* $\sigma_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *then* $B^{-1} = (v_{ij})$ *exists and*

$$|v_{ij}| \leqslant \frac{1}{\sigma_j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{26}$$

$$|\det B| \geqslant \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n. \tag{27}$$

Among the conclusions in this theorem, that B is non-singular is well-known (see *Taussky* [22]), inequality (27) is due to *Price* [18]. We shall see that (27) is a consequence of (26). For upper bounds for $|v_{ij}|$ other than (26), see *Ostrowski* [16]. Actually Theorem 9 is valid for matrices with real or complex elements, but the following proof applies only to the real case.

Proof. In Lemma 2, take $u_i = s_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ and

$$f_i(x) = \frac{\operatorname{sgn} b_{ii}}{\sigma_i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

for $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Then inequalities (15), (16) are satisfied. For a fixed index k between 1 and n, let

$$t_i^{(k)} = \delta_{ik} \operatorname{sgn} b_{kk} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

By Lemma 2, there exist n real numbers $x_j^{(k)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ such that $|x_j^{(k)}| \leqslant 1$ and

$$\frac{\operatorname{sgn} b_{ii}}{\sigma_i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} = \delta_{ik} \cdot \operatorname{sgn} b_{kk} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

which can be written

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j^{(k)} = \sigma_k\, \delta_{ik} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Therefore $B^{-1} = (v_{ij})$ exists and

$$|\, v_{ij}\,| = \frac{|\, x_i^{(j)}\,|}{\sigma_j} \leqslant \frac{1}{\sigma_j}.$$

To derive (27) from (26), we observe that every principal submatrix of B also has dominant diagonal, and therefore is non-singular. Inequality $|\, v_{11}\,| \leqslant \dfrac{1}{\sigma_1}$ can be written

$$\left|\, \frac{\det B}{\det B(2, 3, \ldots, n)}\,\right| \geqslant \sigma_1 = \tau_1.$$

Applying this result to the principal submatrices of B, we get

$$\left|\, \frac{\det B(k, k+1, \ldots, n)}{\det B(k+1, k+2, \ldots, n)}\,\right| \geqslant \tau_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

As $|\det B(n)| = |\, b_{nn}\,| = \tau_n$, the desired inequality (27) follows.

Bibliography

[1] *P. Alexandroff* und *H. Hopf*, Topologie I, Berlin (1935).

[2] *A. Brauer*, A new proof of theorems of Perron and Frobenius on non-negative matrices, Duke Math. Journ., **24**, 367—378 (1957).

[3] *G. Debreu* and *I. N. Herstein*, Nonnegative square matrices, Econometrica, **21**, 597—607 (1953).

[4] *E. Egerváry*, On a lemma of Stieltjes on matrices, Acta Scient. Math. Szeged, **15**, 99—103 (1953—1954).

[5] *K. Fan*, On systems of linear inequalities, Linear inequalities and related systems (Ann. of Math. Studies, No. 38), edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton, 99—156 (1956).

[6] *M. Fréchet*, Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités, Second livre, Paris (1938).

[7] *G. Frobenius*, Über Matrizen aus positiven Elementen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 471—476 (1908), 514—518 (1909).

[8] *G. Frobenius*, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 456—477 (1912).

[9] *F. R. Gantmaher*, Theory of matrices (Russian), Moscow (1954).

[10] *H. E. Goheen*, On a lemma of Stieltjes on matrices, Amer. Math. Monthly, **56**, 328—329 (1949).

[11] *A. S. Householder*, On the convergence of matrix iterations, Journ. Assoc. Computing Machinery, **3**, 314—324 (1956).

[12] *W. Hurewicz* and *H. Wallman*, Dimension theory, Princeton (1941).

[13] *M. Janet*, Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Journ. Math. pures et appl., (8e série), **3**, 65—151 (1920).

[14] *B. Knaster*, *C. Kuratowski* und *S. Mazurkiewicz*, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fund. Math., **14**, 132—137 (1929).

[15] *A. Ostrowski*, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Commentarii Math. Helvetici, **10**, 69—96 (1937).

[16] *A. Ostrowski*, Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal, Proc. Amer. Math. Soc., **3**, 26—30 (1952).

[17] *O. Perron*, Zur Theorie der Matrices, Math. Annalen, **64**, 248—263 (1907).

[18] *G. B. Price*, Bounds for determinants with dominant principal diagonal, Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 497—502 (1951).

[19] *H. Samelson*, On the Perron-Frobenius theorem, Michigan Math. Journ., **4**, 57—59 (1957).

[20] *H. Schneider*, An inequality for latent roots applied to determinants with dominant principal diagonal, Journ. London Math. Soc., **28**, 8—20 (1953).

[21] *E. Sperner*, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., **6**, 265—272 (1928).

[22] *O. Taussky*, A recurring theorem on determinants, Amer. Math. Monthly, **56**, 672—676 (1949).

[23] *J. L. Ullman*, On a theorem of Frobenius, Michigan Math. Journ., **1**, 189—193 (1952).

[24] *H. Wielandt*, Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zeitschr., **52**, 642—648 (1950).

[25] *Y. K. Wong*, Some properties of the proper values of a matrix, Proc. Amer. Math. Soc., **6**, 891—899 (1955).

On Matrices with Non-Negative Elements

By

A. S. Householder, Oak Ridge National Laboratory

(Received November 4, 1957)

A paper by *Ky Fan* [3] gives a topological development of some known theorems on matrices with non-negative elements, and also presents further results of algebraic interest that seem to be new. It is desirable to have strictly algebraic proofs of these algebraic results, and the present note is intended to supply them. The proofs follow almost immediately from a classical, determinantal identity.

The notation used here is that of [4], and differs somewhat from *Fans*'s. In particular $A \geqslant B$ will signify that each element of the matrix A is not less than the corresponding element of matrix B; vertical bars enclosing matrices, as $|A|$, signify the replacement of each element by its modulus; and likewise for vectors. Moreover e_i is the ith column of the identity and $e = \Sigma e_i$ is the vector with unit elements and of the dimensionality implied by the relation in which it occurs. The theorems and lemmas are numbered to correspond to those in *Fan*'s paper, but are paraphrased to conform with the present mode of proof. The statement of Lemma 1 is slightly stronger than that given by *Fan*, thus permitting a simpler proof of Theorem 6, which in this note is the central theorem. Lemma 0 does not occur in *Fan*'s paper but it justifies part of the rephrasing of Lemma 1 and of Theorem 6.

Lemma 0. *Let $C \geqslant 0$, and let $D \geqslant 0$ be a nonsingular diagonal. If for every non-null $x \geqslant 0$ the vector $(C - D)\,x$ has at least one negative element, and if $\lambda = \lambda(D^{-1}C)$ is the maximal proper value of $D^{-1}C$, then $\lambda < 1$.*

There exists a $y \geqslant 0$ such that $D^{-1}C\,y = \lambda y \neq 0$. If $\lambda \geqslant 1$, then

$$0 = (C - \lambda D)\,y \leqslant (C - D)\,y.$$

Since the hypothesis fails for $x = y$, the conclusion follows.

Lemma 1. *Let*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C - D & c \\ c' & -\delta \end{pmatrix},$$

where $C \geqq 0$, $c \geqq 0$, $c' \geqq 0$, $\delta \geqq 0$, *and* $D \geqq 0$ *is a nonsingular diagonal. Let the maximal* $\lambda(D^{-1} C) < 1$. *If there exists a vector* $h > 0$ *such that* $h^T \Gamma > 0$, *then*

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} B & b \\ b' & \beta \end{pmatrix}$$

exists and $\beta > 0$, $b \geqq 0$, $b' > 0$.

Let H and K be diagonals such that

$$h = H e, \quad h^T \Gamma = e^T K.$$

Then if

$$\Gamma' = H \Gamma K^{-1}, \quad e^T \Gamma' = e^T,$$

and the conclusions hold or fail for Γ' as for Γ. Hence it is sufficient to assume for Γ the relation

$$e^T \Gamma = e^T,$$

or, in decomposed form,

$$e^T(C - D) + c' = e^T,$$

$$e^T c - \delta = 1.$$

Since $\lambda(D^{-1} C) < 1$, the expansion of $(I - D^{-1} C)^{-1}$ converges and every term is non-negative. Hence $D - C$ is nonsingular and $(D - C)^{-1} \geqq 0$. By an identity readily verified, if Γ^{-1} exists, then

$$\beta^{-1} = c'(D - C)^{-1} c - \delta,$$

$$b = \beta(D - C)^{-1} c, \qquad b' = \beta c'(D - C)^{-1},$$

$$B = (D - C)^{-1}(cb' - I).$$

But

$$\begin{aligned} c'(D - C)^{-1} c - \delta &= c'(D - C)^{-1} c - e^T c + 1 \\ &= [c' + e^T(D - C)] (D - C)^{-1} c + 1 \\ &= e^T(D - C)^{-1} c + 1 > 0. \end{aligned}$$

Hence β, b, b' and B exist and are indeed effective in composing Γ^{-1}. Hence Γ^{-1} exists. It remains only to verify the strict inequality for b'. But

$$c'(D - C)^{-1} = e^T(D - C)^{-1} + e^T > 0,$$

and the proof is complete.

Theorem 4. *Let*

$$A' = \begin{pmatrix} A & a \\ a' & \alpha \end{pmatrix} \geqq 0,$$

and let $\lambda' = \lambda(A')$ *and* $\lambda = \lambda(A)$ *be maximal for* A' *and* A. *Then* $\lambda' \geqq \lambda$,

but if $\varrho > \lambda$ *and* $\det(\varrho I - A') > 0$, *then* $\varrho > \lambda'$.

That $\lambda' \geqslant \lambda$ is well known, but the fact results directly from the proof of the rest of the theorem. The determinantal identity mentioned above implies that

$$\det(\varrho I - A') = [\varrho - a - a'(\varrho I - A)^{-1} a] \det(\varrho I - A),$$

and the second factor is positive for $\varrho > \lambda$. It will be shown that the first factor is positive for $\varrho > \lambda'$. Let

$$\varphi(\varrho) = a + a'(\varrho I - A)^{-1} a.$$

If $\varphi(\varrho) - a$ vanishes identically (e.g. if $a = 0$ or $a' = 0$), the conclusion is obvious. Otherwise,

$$(\varrho I - A)^{-1} = \varrho^{-1} I + \varrho^{-2} A + \ldots \geqslant 0,$$

whence $\varphi(\lambda) = \infty$, and for $\varrho > \lambda$, $\varphi(\varrho)$ decreases monotonically to $\varphi(\infty) = a$. Hence $\varrho - \varphi(\varrho)$, which vanishes for $\varrho = \lambda'$, is negative when $\lambda < \varrho < \lambda'$, and positive when $\varrho > \lambda'$. This completes the proof.

The following statement represents only a part of *Fan*'s Theorem 5, but the rest is readily deduced from this:

Theorem 5. *Let* $A = D + C \geqslant 0$, *where* D *is the diagonal of* A. *Let* $\lambda = \lambda(A)$ *be the maximal proper value of* A. *Then the following conditions are equivalent*:

(i) $\varrho > \lambda$;

(ii) *If* $M = \Delta - \Gamma$, *where* Δ *is the diagonal of* M, *then the relations* $|\Gamma| \leqslant C$, $|\Delta| \geqslant \varrho I - D$ *imply that* M *is nonsingular*;

(iii) *There exists a nested sequence of principal minors of all orders of* $\varrho I - A$ *whose determinants are positive.*

It is obvious that (i) implies (iii) since, indeed, if $\varrho > \lambda$ then $\det(\varrho I - A)$ and *a fortiori* all its principal minors are positive. An induction based on Theorem 4 establishes the converse. Other proofs are known [1, 5], and, in particular, matrices of this type are discussed by Ostrowski by the name M-matrices, and by *Collatz* [2] as matrices of monotonic type.

To prove the equivalence of (i) and (ii), it is sufficient to consider the irreducible principal minor of A having the largest maximal proper value. Hence assume A irreducible, and let

$$Aa = \lambda a > 0.$$

Then

$$Ca = (\lambda I - D)\, a < (\varrho I - D)\, a,$$

$$(\varrho I - D)^{-1} C\, a < a,$$

and, *a fortiori*,

$$|\, \Delta^{-1} \Gamma \,|\, a < a.$$

Hence $I - \Delta^{-1}\Gamma$ and therefore $\Delta - \Gamma$ are nonsingular. Conversely, $M = \varrho I - A$ is singular when $\varrho = \lambda$.

Theorem 6. *Let $C \geqq 0$, and let $D \geqq 0$ be a nonsingular diagonal, both of order n. Let $c > 0$ and $c^T(C - D) > 0$. If C_i and D_i are the principal minors of C and D obtained by deleting the i^{th} row and i^{th} column, let $\lambda_i < 1$ for every i, where $\lambda_i = \lambda(D_i^{-1} C_i)$ is maximal for that matrix. Then $C - D$ is nonsingular; $(C - D)^{-1} > 0$, strictly; and $C - D$ has exactly one real and positive proper value.*

For by Lemma 1, $C - D$ is nonsingular, and every element of each row of $(C - D)^{-1}$ is strictly positive. Hence every element of the matrix is strictly positive. The final statement follows as in *Fan*'s paper.

The foregoing results can be summarized in part as follows: Let $A \geqq 0$, and assume A irreducible. Let A_i be the submatrix remaining after the deletion of the ith row and the ith column. Let $\lambda = \lambda(A)$ and $\lambda_i = \lambda(A_i)$ be maximal. It is no restriction to suppose that

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_n.$$

Then $\lambda > \lambda_1$. Consider

$$C = C(\varrho) = \varrho I - A,$$

and

$$\delta(\varrho) = \det C$$

Then for $\varrho > \lambda$, $\delta(\varrho) > 0$ and $C^{-1} > 0$. For $\lambda > \varrho \geqq \lambda_n$, $\delta(\varrho) < 0$. For $\lambda > \varrho > \lambda_1$, $C^{-1} < 0$, and for $\lambda_i > \varrho > \lambda_{i+1}$, rows $i + 1, \ldots, n$ and columns $i + 1, \ldots, n$ of C^{-1} are strictly negative. Furthermore, if there exists a real proper value $\lambda' \neq \lambda$ of A, then $\lambda' < \lambda_n$.

If A is reducible the conclusions can fail only in that the inequalities are no longer strict.

Additional justification is required only to show that when A is irreducible, $\delta(\lambda_n) < 0$. But if $C_i(\varrho) = \text{adj}\,(\varrho I - A_i)$, then $C_n(\lambda_n) > 0$, and the conclusion follows from the determinantal identity employed above in view of the fact that

$$C_i(\varrho) = (\varrho I - A_i)^{-1} \det (\varrho I - A_i).$$

References

[1] *E. Burger*, Eine Bemerkung über nicht-negative Matrizen. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., **37**, 227 (1957).

[2] *Lothar Collatz*, Einige Anwendungen funktionanalytischer Methoden in der praktischen Analysis. Zeitschr. für angew. Math. u. Phys., **4**, 327—357 (1953).

[3] *Ky Fan*, Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements Mh. Math. **62**, 219—237 (1958).

[4] *Alston S. Householder*, On the convergence of matrix iterations. Journ. Assoc. Computing Mach., **3**, 314—324 (1956).

[5] *Alexander Ostrowski*, Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen. Com. Mat. Helv., **30**, 175—210 (1956).

Some Transference Theorems in the Geometry of Numbers

By

R. P. Bambah, Notre Dame, Indiana, USA.

(Received December 16, 1957)

1. Let K be a closed n-dimensional convex body with centre at the origin 0. Let the gauge function of K be $F(X)$, so that K consists of the points $F(X) \leqslant 1$. Let tK denote the body $F(X) \leqslant t$, obtained by expanding K about 0 in the ratio $t : 1$. Let $V(K) = V$ be the volume of K.

Denote by λ_1 and μ respectively the homogeneous and inhomogeneous minima of K with respect to a given lattice Λ. Then $\frac{1}{2}\lambda_1$ is the $l.u.b$ of those t for which Λ is a packing lattice of tk and μ is the $g.l.b$ of those for which Λ is a covering lattice for tK.

Let

$$\delta_1(\Lambda, \tfrac{1}{2}\lambda_1 K) = (\tfrac{1}{2}\lambda_1)^n V/d(\Lambda),$$

where $d(\Lambda)$ is the determinant of Λ, denote the density of the lattice packing of $\frac{1}{2}\lambda_1 K$ provided by Λ. Write

$$Q_1 = 1/\delta_1(\Lambda, \tfrac{1}{2}\lambda_1 K).$$

Then, *E. Hlawka* (2) proved that

$$\mu \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_1([Q_1] + 1)\left(\frac{Q_1}{[Q_1]+1}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

where $[Q_1]$, as usual, denotes the largest integer not greater than Q_1; while *M. Kneser* (3) showed that

$$\mu \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_1([Q_1] + <Q_1>^{\frac{1}{n}}), \tag{2}$$

where $<Q_1> = Q_1 - [Q_1]$ is the fractional part of Q_1. Later *B. J. Birch* (1) proved that

$$\text{If } Q_1 \geqslant n, \text{ then } \mu \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_1 Q_1. \tag{3}$$

Hlawka (2) also proved that for every number $\theta > \delta^*$, the density of

* This ressearch was partially supported by the Office of Naval Research, U. S. Government.

the best packing (*not necessarily lattice*) of K, one has

$$\mu \leqslant \tfrac{1}{2}\,\lambda_1(Q_1\,\theta)^{1-\frac{1}{n}}\,([Q_1\,\theta]+1)^{1-\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Let $\delta = \delta(K)$ denote the density of the best lattice packing of K. In the notation of the Geometry of Numbers,

$$\delta = \delta(K) = V(K)/\Delta(2\,K), \tag{5}$$

where $\Delta(2\,K)$ is the critical determinant of $2\,K$. The object of this note is to apply a method of *C. A. Rogers* (4) to prove

Theorem 1: *Let λ be any number such that Λ is a packing lattice for $\frac{1}{2}\,\lambda\,K$, and let*

$$\frac{1}{Q} = \delta(\Lambda, \tfrac{1}{2}\,\lambda\,K) = (\tfrac{1}{2}\,\lambda)^n\,V \mid d(\Lambda). \tag{6}$$

Then, for all non-negative integers $m = 0, 1, 2, \ldots$, we have

$$\mu < \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\,3^{m+1} \text{ if } 3^m \leqslant Q\delta < 3^{m+1}. \tag{7}$$

The estimate (7) for μ is better than that in (3) for the intervals:

$$3 \leqslant Q < 3/\delta,\ 3^2 \leqslant Q < 3^2/\delta,\ 3^3 \leqslant Q < 3^3/\delta, \ldots,$$

which are non-empty if $\delta < 1$. These intervals, in fact, cover all possible values of Q if $\delta < {}^1/_3$, so that if $\delta < {}^1/_3$, (7) is an improvement on (3), (2) and (1) for all Q and all n.

It is difficult to compare (7) with (4). But, since

$$(Q_1\,\theta)^{1-\frac{1}{n}}\,([Q_1\,\theta]+1)^{1-\frac{1}{n}} > (Q_1\,\delta^*)^{2-\frac{2}{n}} \geqslant (Q_1\,\delta)^{2-\frac{2}{n}},$$

it is easy to verify that (7) is definitely better than (4) for at least

$$3^{(m+1)/(2-\frac{2}{n})} \leqslant Q\,\delta < 3^{(m+1)}.$$

These intervals are non-empty for $n \geqslant 3$, and at least cover all values of

$$Q\delta \geqslant 3^{1/(1-\frac{1}{n})} \text{ if } n \geqslant 4,$$

and

$$Q\delta \geqslant 3^{1/(2-\frac{2}{n})} \text{ if } n \geqslant 3.$$

In § 3 we prove that Theorem 1 can be easily improved to

Theorem 2: *Under the same conditions as in Theorem 1, we have*

$$\mu \leqslant \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\,3^{m+1}\,(Q\delta/3^{m+1})^{\frac{1}{n}} \text{ if } 3^m \leqslant Q\delta < 3^{m+1}. \tag{8}$$

Since

$$3^{m+1}(Q\delta/3^{m+1})^{\frac{1}{n}} < Q$$

if

$$\delta^{\frac{1}{n-1}} \cdot 3^{m+1} < Q,$$

it foilows that the estimate for μ in (8) is better than $\frac{1}{2}\lambda Q$ for Q in the intervals

$$\delta^{\frac{1}{n}-1} \cdot 3^{m+1} < Q < 3^{m+1}/\delta, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

which are not empty if $\delta > 1$, and include all possible values of Q if $\delta < \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{1}{n}}$.

In § 4 we indicate how the same method gives

Theorem 3: Under the conditions of Theorem 1,

$$\mu < \tfrac{1}{2}\lambda \cdot 2^{m+2} \text{ if } \frac{2^m}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^{m+1}}{\delta}. \tag{9}$$

The estimate (9) is better than (7) for many Q, *e . g* for

$$\frac{3}{\delta} \leqslant Q < \frac{4}{\delta}, \frac{3^3}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^5}{\delta}, \frac{3^5}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^8}{\delta}, \frac{3^6}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^{10}}{\delta}, \ldots.$$

In fact (9) is better than (7) for all Q in

$$\frac{3^{m_1}}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^{m_2}}{\delta},$$

provided that m_1 and m_2 are integers with

$$3^{m_1} < 2^{m_2} < 2^{m_1+1} < 3^{m_1+1}.$$

From Theorem 3 one can easily deduce

Theorem 4: $\mu \leqslant \frac{1}{2}\lambda \cdot 2^{m+2}\left(\frac{Q\delta}{2^{m+1}}\right)^{\frac{1}{n}}$ if $\frac{2^m}{\delta} \leqslant Q < \frac{2^{m+1}}{\delta}$.

My thanks are due to Professor *K. Mahler* for his interest and encouragement to write this note.

2. Proof of Theorem 1:

We shall prove the theorem by induction on m.

First suppose $m = 0$, so that

$$\frac{1}{\delta} \leqslant Q < \frac{3}{\delta}. \tag{10}$$

Since Λ is a packing lattice for $\frac{1}{2}\lambda K$, we have

$$f(A) \geqslant \lambda \text{ for all } A \varepsilon \Lambda, A \neq 0. \tag{11}$$

Since $\mu = \text{inf. } t$ for which tK has Λ as a covering lattice, it follows easily from the boundedness of K that Λ is a covering lattice for μK. Also, it is an easy consequence of the Heine Borel theorem that there is at least one point Z on the boundary of μK, which is just covered, i. e.,

$$f(Z) = \mu \text{ and } f(Z - A) \geqslant \mu \text{ for all } A\varepsilon \Lambda. \tag{12}$$

Since Λ is a covering lattice for μK, there is a point $X\varepsilon \Lambda$, such that

$$f(3Z - X) \leqslant \mu,$$

and

$$f(Z - \tfrac{1}{3}X) \leqslant \tfrac{1}{3}\mu. \tag{13}$$

Because of (12), $\frac{1}{3}X$ is not a point of Λ. Therefore, Λ', the lattice of points A, $A \pm \frac{1}{3}X$, $A\varepsilon\Lambda$, has determinant

$$d(\Lambda') = \tfrac{1}{3}d(\Lambda). \tag{14}$$

Also, if $B\varepsilon\Lambda'$, $B \neq 0$, then

(i) $B = A$, $A\varepsilon\Lambda$, $A \neq 0$, or (ii) $B = A + \frac{1}{3}X$, $A\varepsilon\Lambda$, or (iii) $B = A - \frac{1}{3}X$, $A\varepsilon\Lambda$.

In case (i)

$$f(B) = f(A) \geqslant \lambda \qquad \text{(by (11))}. \tag{15}$$

in case (ii),

$$\begin{aligned} f(B) = f(A + \tfrac{1}{3}X) &= f(A + Z - Z + \tfrac{1}{3}X) \\ &\geqslant f(Z + A) - f(Z - \tfrac{1}{3}X) \\ &\geqslant \mu - \tfrac{1}{3}\mu \text{ (by (12) and (13))} \\ &= \tfrac{2}{3}\mu; \end{aligned} \tag{16}$$

and in case (iii),

$$\begin{aligned} f(B) = f(A - \tfrac{1}{3}X) &= f(A - Z + Z - \tfrac{1}{3}X) \\ &\geqslant f(Z - A) - f(Z - \tfrac{1}{3}X) \\ &\geqslant \mu - \tfrac{1}{3}\mu \text{ (by (12) and (13))} \\ &= \tfrac{2}{3}\mu. \end{aligned} \tag{17}$$

Combining (15), (16) and (17), we get

$$f(B) \geqslant \text{Min. } (\lambda, \tfrac{2}{3}\mu) \text{ for all } B\varepsilon\Lambda', B \neq 0. \tag{18}$$

We now assert that

$$\mu < \tfrac{1}{2}\lambda \,.\, 3,$$

so that the theorem is true for $m = 0$.

If not, we have

$$^2/_3\,\mu \geqq \lambda,$$

and (18) becomes

$$f(B) \geqq \lambda \text{ for all } B \varepsilon \Lambda',\ B \neq 0,$$

so that the lattice Λ' provides a packing by the bodies $\frac{1}{2}\,\lambda K$. The density $\delta(\Lambda, \frac{1}{2}\,\lambda\, K)$ of this packing satisfies

$$\delta(\Lambda', \tfrac{1}{2}\,\lambda\, K) = V(\tfrac{1}{2}\,\lambda\, K)/d(\Lambda')$$

$$= 3\,\delta(\Lambda, \tfrac{1}{2}\,\lambda\, K) = \frac{3}{Q} > \delta \quad \text{(by (10))},$$

which is impossible, because δ is the density of the best lattice packing of K. This contradiction proves our assertion and hence the Theorem for $m = 0$.

Now suppose the theorem is true for $m \geqq o$, and suppose

$$\frac{3^{m+1}}{\delta} \leqq Q < \frac{3^{m+2}}{\delta}. \tag{19}$$

By the construction of the first part of the proof we get a lattice Λ', such that

1. Λ' consists of points A, $A + {}^1/_3\,X$, $A - {}^1/_3\,X$, $A\,\varepsilon\Lambda$, $X\varepsilon\Lambda$, ${}^1/_3\,X \notin \Lambda$,

(ii) $d(\Lambda') = {}^1/_3\,d(\Lambda)$,

and

(iii) $f(B) \geqq \min.\,(\lambda, {}^2/_3\,\mu)$ for all $B\varepsilon\Lambda'$, $B \neq 0$.

If $\mu < \frac{1}{2}\,\lambda\,.\,3 < \frac{1}{2}\,\lambda\,.\,3^{m+2}$, there is nothing to prove. Therefore, we can suppose ${}^2/_3\,\mu \geqq \lambda$ and (iii) gives

$$f(B) \geqq \lambda \text{ for all } B\varepsilon\Lambda',\ B \neq 0, \tag{20}$$

so that Λ' is a packing lattice for $\frac{1}{2}\,\lambda\, K$. If we denote the corresponding $Q = d(\Lambda')/V(\frac{1}{2}\,\lambda\, K)$ by Q', we get from (19) the inequalities

$$\frac{3^m}{\delta} \leqq {}^1/_3\,Q = Q' < \frac{3^{m+1}}{\delta}. \tag{21}$$

By the induction hypothesesis Λ' is a covering lattice for $\mu'\,K$, where

$$\mu' < \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\,3^{m+1}.$$

The lattice $\Lambda'' = 3\,\Lambda'$ is consequently a covering lattice for $\mu''\,K = 3\,\mu'\,K$, and since Λ'' is a sub-lattice of Λ it follows that Λ is a covering lattice for $\mu''\,K$, so that

$$\mu \leqslant \mu'' = 3\,\mu' < \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\,3^{m+2},$$

and the induction is completed.

3. Proof of Theorem 2

Let Λ be a packing lattice for $\frac{1}{2}\,\lambda\,K$ and the corresponding Q satisfy

$$\frac{3^m}{\delta} \leqslant Q = d(\Lambda)/V(\tfrac{1}{2}\,\lambda\,K) < \frac{3^{m+1}}{\delta}.$$

Since $Q < \dfrac{3^{m+1}}{\delta}$, for all $\varepsilon > o$, sufficiently small, we have

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{Q\delta}{3^{m+1}}\right)^{\frac{1}{n}} (1+\varepsilon) < \lambda,$$

so that Λ is a packing lattice for $\frac{1}{2}\,\lambda'\,K$ also. If we denote $d(\Lambda)/V(\frac{1}{2}\,\lambda'\,K)$ by Q', we get

$$Q' = \frac{Q\,3^{m+1}}{Q\,.\,\delta(1+\varepsilon)^n} = \frac{3^{m+1}}{(1+\varepsilon)^n\,\delta} < \frac{3^{m+1}}{\delta},$$

and by theorem 1, Λ is a covering lattice for $\mu'\,K$ with

$$\mu' < \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,.\,3^{m+1} = \tfrac{1}{2}\,\lambda \left(\frac{Q\delta}{3^{m+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.\,3^{m+1}\,(1+\varepsilon),$$

so that

$$\mu \leqslant \mu' < \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\left(\frac{Q\delta}{3^{m+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.\,3^{m+1}\,(1+\varepsilon).$$

But μ is independent of ε. Therefore, we must have,

$$\mu \leqslant \tfrac{1}{2}\,\lambda\,.\left(\frac{Q\delta}{3^{m+1}}\right)^{\frac{1}{n}}.\,3^{m+1},$$

and Theorem 2 is proved.

4. Proofs of Theorems 3 and 4

If in stead of $3\,Z$, we consider $2\,Z$ in § 2, we get a point $X \varepsilon \Lambda$, such that $\frac{1}{2}\,X \notin \Lambda$, and

$$f(Z - \tfrac{1}{2}\,X) \leqslant \tfrac{1}{2}\,\mu.$$

Then, taking Λ' to be the lattice consisting of points A, $A + \frac{1}{2}\,X$, $A \varepsilon \Lambda$, we get

$$d(\Lambda') = \tfrac{1}{2}\,d(\Lambda), \tag{22}$$

and for all $B \neq 0$ of Λ',

$$f(B) \geqslant \text{Min. } (\lambda, \tfrac{1}{2}\,\mu). \tag{23}$$

Then if $\mu \leqq \frac{1}{2}\lambda.4$, we get $f(B) \geqq \lambda$ for all $B \neq 0$ of Λ', so that Λ' is a packing lattice for $\frac{1}{2}\lambda K$ with the corresponding $Q' = \frac{1}{2}Q$.

This fact leads to a proof of Theorem 3 analogous to that of Theorem 1. Theorem 4 follows from Theorem 3 in the same manner as Theorem 2 is deduced from Theorem 1.

References

[1] *B. J. Birch*, J. Lond. Math. Soc., **31**, 248—251 (1956).
[2] *E. Hlawka*, Mh. Math., **58**, 287—291 (1954).
[3] *M. Kneser*, Math. Z., **61**, 429—434 (1955).
[4] *C. A. Rogers*, J. Lond. Math. Soc. **25**, 327—331 (1950).

Notre Dame University
Notre Dame, Indiana
and
Panjab University
Hoshiapur, India

Mittelwerte über Gitter II

Von

Wolfgang Schmidt, Wien

(Eingegangen am 23. Dezember 1957)

Einleitung

Als ich mich bemühte, die Ergebnisse der früher erschienenen Arbeit „Mittelwerte über Gitter"[1] zu erweitern, mußte ich feststellen, daß der dortige Beweis von Satz 2 fehlerhaft war.

Die vorliegende Arbeit hat daher zwei Teile. Zunächst wird in Teil A der falsche Beweis aus der Arbeit „Mittelwerte über Gitter", die wir mit I zitieren wollen, durch einen richtigen ersetzt. In A wird demnach die Formel

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{(g_1,\ldots,g_m)\in H^r_m} f(Dg_1,\ldots,Dg_m)\,d\omega_D = \int\ldots\int f(X_1,\ldots,X_m)\,dX_1\ldots dX_m$$

bewiesen. Dabei werden die Begriffe und Bezeichnungen aus I benutzt, und wie in I wird $n \geq r > m$ vorausgesetzt.

In B werden neue Mittelwertformeln aufgestellt und bewiesen. Insbesondere wird der Fall $n = r = m$ untersucht.

A

In I sind Zeile 6 von unten auf Seite 273 bis Zeile 9 von unten auf Seite 274 zu ersetzen durch:

Beweis von Satz 2. Unter $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{Z}$ usf. verstehen wir $\mathfrak{D}_r$, $\mathfrak{Z}_r$, wobei wir uns die Zahl r fest gegeben denken.

Wir nennen zwei $(m-1)$ — tupel $(g_1,\ldots,g_{m-1}) \in H^r_{m-1}$ und $(h_1,\ldots,h_{m-1}) \in H^r_{m-1}$ äquivalent, falls es ein $Z \in \mathfrak{Z}$ gibt, so daß $g_i = Z\,h_i$ $(1 \leq i \leq m-1)$. Jeder Äquivalenzklasse K ordnen wir einen Repräsentanten $(h_1,\ldots,h_{m-1})$ zu, der in der $X_1,\ldots,X_{n-r+m-1}$-Ebene liegt.

---

[1] *W. Schmidt*, Mittelwerte über Gitter, Mh. Math. **61**, 269—276 (1957).

Wir wählen $Z(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \mathfrak{Z}$ so, daß $g_i = Z\, h_i$ $(1 \leq i \leq m-1)$. Da $f \geq 0$ ist, folgt

$$\int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in H_m^r} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \sum_{(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in H_{m-1}^r} \int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{\substack{g_m \\ (g_1, \ldots, g_m) \in H_m^r}} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D = \sum_K \chi(K), \quad \text{(I 9)}$$

wobei

$$\chi(K) = \sum_{(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in K} \int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{\substack{g_m \\ (g_1, \ldots\ g_m) \in H_m^r}} f(Dg_1, \ldots, Dg_{m-1}, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \sum_{(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in K} \int\limits_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})\, Z(g_1, \ldots, g_{m-1})} \sum_{\bar{g}_m \in H_1^{r-m+1}} f(Dh_1, \ldots, Dh_{m-1}, D\bar{g}_m)\, d\omega_D =$$

$$= \int\limits_{F_1} \sum_{\bar{g}_m \in H_1^{r-m+1}} f(Dh_1, \ldots, Dh_{m-1}, D\bar{g}_m)\, d\omega_D. \quad \text{(I 9a)}$$

Hierbei ist $g_m \in H_1^{r-m+1}$, weil aus $(g_1, \ldots, g_m) \in H_m^r$ sofort $(Z^{-1} g_1, \ldots, Z^{-1} g_{m-1}, Z^{-1} g_m) \in H_m^r$ und weiter $(h_1, \ldots, h_{m-1}, Z^{-1} g_m) \in H_m^r$ folgt, was eben $\bar{g}_m = Z^{-1} g_m \in H_1^{r-m+1}$ bedeutet. Wir benützen noch die Bezeichnung

$$F_1 = \bigcup_{(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in K} F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z}).\, Z(g_1, \ldots, g_{m-1}).$$

Die linksseitigen Nebenklassen der Untergruppe $\mathfrak{Z}_{r-(m-1)} \subset \mathfrak{Z}_r$ sind die $Z(g_1, \ldots, g_{m-1}) \cdot \mathfrak{Z}_{r-(m-1)}$, wobei $(g_1, \ldots, g_{m-1})$ über alle $(m-1)$-tupel von K variiert. Daher ist F_1 ein Fundamentalbereich $F(\mathfrak{D}_r/\mathfrak{Z}_{r-(m-1)})$ für $\mathfrak{Z}_{r-(m-1)} \subset \mathfrak{D}_r$.

Fast jedem $Y_{n-r+1}, \ldots, Y_{n-r+m-1}$ kann man ein $T_y \in \mathfrak{D}$ zuordnen, dessen i-te Spalte gleich Y_i ist. $(n - r + 1 \leq i \leq n - r + m - 1)$. Jedes $D \in \mathfrak{D}$ kann man dann eindeutig in der Form $D = T_y \overline{D}$ schreiben, wobei $\overline{D} \in \mathfrak{D}_{r-(m-1)}$. D durchläuft $F(\mathfrak{D}_r/\mathfrak{Z}_{r-(m-1)})$, falls $\overline{D}$ $F(\mathfrak{D}_{r-(m-1)}/\mathfrak{Z}_{r-(m-1)})$ durchläuft und $Y_{n-r+1}, \ldots, Y_{n-r+m-1}$ den Raum durchlaufen. Weiter ist

$$d\omega_{D_r} = c\; d\omega_{D_{r-m+1}}\, d\,Y_{n-r+1} \ldots d\,Y_{n-r+m-1}, \quad \text{(I 9b)}$$

wo c ein konstanter Faktor ist. Dies deshalb, weil das auf der rechten Seite stehende Volumelement invariant gegen Transformationen aus $\mathfrak{D}_r$ ist. Ist nämlich T eine solche Transformation und $T\,D = D'$, $T\,T_y\,\overline{D} = T_y'\,\overline{D}'$, so geht offenbar Y_i' aus Y_i durch $Y_i' = T\,Y_i$ hervor

$(n-r+1 \leq i \leq n-r+m-1)$. Weiter aber ist $\overline{D'} = T'^{-1}_y \, T \, T_y \, \overline{D}$, und $d\omega_{D_{r-m+1}}$ ist ja invariant gegen Transformationen aus $\mathfrak{D}_{r-m+1}$.

Aus diesen Überlegungen und (I 9a) ergibt sich

$$\chi(K) = c \int \dots \int \int_{F(\mathfrak{D}_{r-m+1}/\mathfrak{z}_{r-m+1})} \sum_{\overline{g}_m \in H_1^{r-m+1}}$$

$$f(T_y \overline{D} h_1, \dots, T_y \overline{D} h_{m-1}, T_y \overline{D} g_m) \, d\omega_{\overline{D}} \, d Y_{n-r+1} \dots d Y_{n-r+m-1}$$

$$= c \int \dots \int f(T_y h_1, \dots, T_y h_{m-1}, X) \, d X \, d Y_{n-r+1} \dots d Y_{n-r+m-1},$$

weil $\overline{D} h_i = h_i \quad (1 \leq i \leq m-1)$ und

$$\int f(T_y h_1, \dots, T_y h_{m-1}, T_y X) \, dX = \int f(T_y h_1, \dots, T_y h_{m-1}, X) \, dX.$$

Daraus folgt

$$\chi(K) = c \int \dots \int \int_{F(\mathfrak{D}_{r-m+1}/\mathfrak{z}_{r-m+1})} \int f(T_y \overline{D} h_1, \dots, T_y \overline{D} h_{m-1}, X)$$

$$dX \, d\omega_{\overline{D}} \, d Y_{n-r+1} \dots d Y_{n-r+m-1} =$$

$$= \int_{F(\mathfrak{D}_r/\mathfrak{z}_{r-m+1})} f(D h_1, \dots, D h_{m-1}, X) \, dX \, d\omega_D =$$

$$= \sum_{(g_1, \dots, g_{m-1}) \in K} \int_{F(\mathfrak{D}_r/\mathfrak{z}_r)} f(D g_1, \dots, D g_{m-1}, X) \, dX \, d\omega_D.$$

II

1. Unter $\overline{H_m^r}$ $(m \leq r \leq n)$ verstehen wir die Menge jener $(g_1, \dots, g_m)$, deren Normalprojektionen $(Pg_1, \dots, Pg_m)$ auf die $X_{n-r+1}, \dots, X_n$-Ebene zu einer unimodularen $r \times r$-Matrix mit Spalten $Pg_1, \dots, Pg_m$ ergänzt werden können. Speziell ist daher $\overline{H_1^n}$ die Menge der primitiven Gitterpunkte. Statt $\overline{H_m^n}$ schreiben wir kurz $\overline{H_m}$. Als Analogon zu Satz 2 in I gilt

Satz 1

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{(g_1, \dots, g_m) \in \overline{H_m^r}} f(D g_1, \dots, D g_m) \, d\omega_D =$$

$$= \prod_{j=r-m+1}^{r} \zeta(j)^{-1} \int \dots \int f(X_1, \dots, X_m) \, dX_1 \dots dX_m. \tag{1}$$

Der Beweis von Satz 1 soll kurz skizziert werden. Völlig analog zu Formel (5 I) ist die Gleichung

$$\int_{F(\mathfrak{C}/\mathfrak{B})} \sum_{h} \left(\int \dots \int f(C(x_1, \dots, x_{n-r}, h_{n-r+1}, \dots, h_n)) \, dx_1 \dots dx_{n-r} \right) d\omega_C$$

$$= \zeta(r)^{-1} \int f(X) \, dX, \tag{2}$$

wobei $h = (h_{n-r+1}, \ldots, h_n)$ über alle primitiven Gitterpunkte zu summieren ist. [Die Bezeichnung ist unkonsequent, da in (2) h_i nicht Gitterpunkte, sondern Koordinaten eines Gitterpunktes bedeuten. Sie wurde, um die Analogie mit I zu verdeutlichen, beibehalten]. Genau wie in I erhält man nun analog zum dortigen Satz 1 die Gleichung

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{g \in \overline{H}_1^r} f(Dg)\, d\omega_D = \zeta(r)^{-1} \int f(X)\, dX$$

als Spezialfall von (1). Analog zu (I 10) ergibt sich schließlich

$$\int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{(g_1, \ldots, g_m) \in \overline{H}_m^r} f(Dg_1, \ldots, Dg_m)\, d\omega_D =$$

$$= \zeta(r-m+1)^{-1} \int_{F(\mathfrak{D}/\mathfrak{Z})} \sum_{(g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \overline{H}_{m-1}^r} \int f(Dg_1, \ldots, Dg_{m-1}, X)\, dX\, d\omega_D. \quad (3)$$

Durch wiederholte Anwendung von (3) erhält man den behaupteten Satz.

2. Jedem $(n-1)$-tupel $X_1, \ldots, X_{n-1}$ von linear unabhängigen Punkten im R_n ordnen wir einen Punkt $X = X(X_1, \ldots, X_{n-1})$ so zu, daß die Determinante $| X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X | = 1$ ist. Unter $t\,X$ wollen wir den Punkt mit Koordinaten $t\,x_i$ verstehen.

Satz 2

$$\int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n} f(Ag_1, \ldots, Ag_n)\, d\omega_A =$$

$$= \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \ldots \int \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} +$$

$$+ X)\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

Beweis von Satz 2. Zu jedem $(g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \overline{H}_{n-1}$ gibt es ein $U(g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \mathfrak{U}$, so daß $g_i = U\, e_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren bedeuten. Da $f \geq 0$, folgt

$$\psi = \int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n} f(Ag_1, \ldots, Ag_n)\, d\omega_A =$$

$$= \sum_{(g, \ldots, g_{n-1}) \in \overline{H}_{n-1}} \int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{\substack{g_n \\ (g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n}} f(Ag_1, \ldots, Ag_n)\, d\omega_A =$$

$$= \sum_{(g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \overline{H}_{n-1}} \int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})\, U(g_1, \ldots, g_{n-1})} \sum_{\bar{g}_n \in J} f(Ae_1, \ldots, Ae_{n-1}, A\bar{g}_n)\, d\omega_A =$$

$$= \int_{F_1} \sum_{\bar{g}_n \in J} f(Ae_1, \ldots, Ae_{n-1}, A\bar{g}_n)\, d\omega_A. \quad (4)$$

$J = \overline{H}_1^1$ besteht aus jenen $\bar{g}_n$, die $| e_1, \ldots, e_{n-1}, \bar{g}_n | = +1$ leisten.

Dabei verwendeten wir

$$F_1 = \underset{(g_1,\ldots,g_{n-1})\in \overline{H}_{n-1}}{U} F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})\, U(g_1,\ldots,g_{n-1}).$$

Die linksseitigen Nebenklassen der Untergruppe $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{U}$ sind die $U(g_1,\ldots,g_{n-1})\,\mathfrak{B}_1$, wobei $(g_1,\ldots,g_{n-1})$ über alle $(n-1)$-tupel von $\overline{H}_{n-1}$ variiert. Daher ist F_1 ein Fundamentalbereich $F(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_1)$ für $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}$.

Fast jedem $Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ kann man ein $T_y \in \mathfrak{A}$ zuordnen, dessen i-te Spalte gleich Y_i ist. $(1 \leq i \leq n-1)$. Jedes $A \in \mathfrak{U}$ kann man nun eindeutig in der Form $A = T_y \cdot B$ schreiben, wobei $B \in \mathfrak{B}_1$. A durchläuft $F(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_1)$, falls B $F(\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_1)$ durchläuft und $Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ den Raum durchlaufen. Weiter ist

$$d\omega_A = c\, d\omega_B\; dY_1 \ldots, dY_{n-1},$$

was ebenso wie (I 9b) zu beweisen ist.

Daraus und aus (4) folgern wir

$$\psi = c \int\ldots\int \int\limits_{F(\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_1)} \sum_{\bar{g}_n \in J} f(T_y B e_1,\ldots,T_y B e_{n-1}, T_y B \bar{g}_n)\, d\omega_B\, dY_1 \ldots dY_{n-1}$$

$$= c \int\ldots\int \int\limits_{F(\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_1)} \sum_{\bar{g}_n \in J} f(T_y e_1,\ldots,T_y e_{n-1}, T_y B \bar{g}_n)\, d\omega_B\, dY_1 \ldots dY_{n-1}$$

$$= c \int\ldots\int\int\ldots\int f(T_y e_1,\ldots,T_y e_{n-1}, T_y(t_1,\ldots,t_{n-1},1))\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, dY_1 \ldots dY_{n-1}$$

nach Lemma 1 in I. Dieser Ausdruck ist weiter gleich

$$c \int\ldots\int\int\ldots\int f(T_y e_1,\ldots,T_y e_{n-1}, t_1 T_y e_1 + \ldots + t_{n-1} T_y e_{n-1} + X(T_y e_1,\ldots,T_y e_{n-1}))\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, dY_1 \ldots dY_{n-1}$$

$$= c \int\ldots\int\int\ldots\int f(T_y B e_1,\ldots,T_y B e_{n-1}, t_1 T_y B e_1 + \ldots + t_{n-1} T_y B e_{n-1} + X(T_y B e_1,\ldots,T_y B e_{n-1}))\, dt_1 \ldots dt_{n-1} dY_1 \ldots dY_{n-1}$$

$$= \int\limits_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_1)} \int\ldots\int f(A e_1,\ldots,A e_{n-1}, t_1 A e_1 + \ldots + t_{n-1} A e_{n-1} + X(\ldots))\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, d\omega_A$$

$$= \int\limits_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \int\ldots\int \sum_{(g_1,\ldots,g_{n-1})\in \overline{H}_{n-1}} f(A g_1,\ldots,A g_{n-1}, t_1 A g_1 + \ldots + t_{n-1} A g_{n-1} + X(\ldots))\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, d\omega_A$$

$$= \int\limits_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1,\ldots,g_{n-1})\in \overline{H}_{n-1}} e(A g_1,\ldots,A g_{n-1})\, d\omega,$$

wobei

$$e(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} + X(X_1, \ldots, X_{n-1}))\, dt_1 \ldots dt_{n-1}.$$

Nun ist aber nach Satz 1

$$\int_{F(\mathfrak{X}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_{n-1}) \in \overline{H}_{n-1}} e(A g_1, \ldots, A g_{n-1})\, d\omega$$

$$= \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \ldots \int e(X_1, \ldots, X_{n-1})\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

Infolgedessen erhält man für ψ den Ausdruck

$$\psi = \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1}$$
$$\int \ldots \int \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} + X))\, dt_1 \ldots$$
$$\ldots dt_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

3. Ähnlich wie früher nennen wir n-tupel $(g_1, \ldots, g_n) \in H_n$ und $(h_1, \ldots, h_n) \in H_n$ äquivalent, falls es ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt, so daß durchwegs $g_i = U h_i$. Ist K eine Äquivalenzklasse, so wollen wir unter $d(K)$ die Determinante $|g_1, \ldots, g_n|$ von einem n-tupel $(g_1, \ldots, g_n) \in K$ verstehen.

Satz 3. Ist $d(K) = k$, dann ist

$$\psi(K) = \int_{F(\mathfrak{X}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in K} f(A g_1, \ldots, A g_n)\, d\omega$$

$$= |k|^{-(n-1)} \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \ldots \int \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots$$
$$\ldots + t_{n-1} X_{n-1} + k \,.\, X)\, dt_1 \ldots dt_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

Beweis von Satz 3. In K gibt es einen Repräsentanten $(h_1, \ldots, h_n)$ der Gestalt

$$h_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} e_j \qquad (1 \leq i \leq n)$$

wobei e_j die Einheitsvektoren sind. Die Gesamtheit der $(g_1, \ldots, g_n) \in K$ ist gleich der Gesamtheit der $(Uh_1, \ldots, Uh_n)$, wobei U ganz $\mathfrak{U}$ durchläuft. Folglich ist

$$\sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in K} f(A g_1, \ldots, A g_n) = \sum_{U \in \mathfrak{U}} f(A U h_1, \ldots, A U h_n)$$

$$= \sum_{U \in \mathfrak{U}} f(A U c_{11} e_1, A U(c_{21} e_1 + c_{22} e_2), \ldots, A U(\sum_{j=1}^{n} c_{nj} e_j))$$

$$= \sum_{U \in \mathfrak{U}} f(c_{11} A U e_1, c_{21} A U e_1 + c_{22} A U e_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{nj} A U e_j)$$

$$= \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n} f(c_{11} A g_1, c_{21} A g_1 + c_{22} A g_2, \ldots, c_{n1} A g_1 + \ldots + c_{nn} A g_n)$$

$$= \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n} p(A g_1, \ldots, A g_n),$$

wobei

$$p(X_1, \ldots, X_n) = f(c_{11} X_1, \; c_{21} X_1 + c_{22} X_2, \ldots, c_{n1} X_1 + \ldots + c_{nn} X_n).$$

Man sieht daraus

$$\psi(K) = \int_{F(\mathfrak{A}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in \overline{H}_n} p(A g_1, \ldots, A g_n) \, d\omega$$

$$= \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \ldots \int \int \ldots \int p(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} + X) \, dt_1 \ldots dt_{n-1} \, dX_1 \ldots dX_{n-1}$$

$$= \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \int \ldots \int \int \ldots \int f(c_{11} X_1, c_{21} X_1 + c_{22} X_2, \ldots, c_{n-1\,1} X_1 + \ldots + c_{n-1\,n-1} X_{n-1}, c_{n1} X_1 + \ldots + c_{n\,n-1} X_{n-1} + c_{nn}(t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} + X)) \, dt_1 \ldots dt_{n-1} \, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

Durch die Substitution

$$\bar{t}_i = t_i + c_{ni}/c_{nn} \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

kann man den Ausdruck $c_{n1} X_1 + \ldots + c_{n\,n-1} X_{n-1}$ wegschaffen. Wir führen weiter $X_1', \ldots, X_{n-1}'$ durch

$$X_i' = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} X_i \qquad (1 \leq i \leq n-1)$$

ein. Dann gibt es zu jedem $X'(X_1', \ldots, X_{n-1}')$ eine Funktion $X(X_1, \ldots, X_{n-1})$, so daß

$$X(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} c_{ii} \cdot X'(X_1', \ldots, X_{n-1}').$$

Endlich soll $t_1', \ldots, t_{n-1}'$ aus $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n-1}$ durch eine lineare homogene Transformation hervorgehen, die

$$t_1' X_1' + \ldots + t_{n-1}' X_{n-1}' = c_{nn}(\bar{t}_1 X_1 + \ldots + \bar{t}_{n-1} X_{n-1})$$

leistet. Man sieht leicht

$$\frac{\partial(X_1', \ldots, X_{n-1}')}{\partial(X_1, \ldots, X_{n-1})} = \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_{ii} \right)^n \text{ und } \frac{\partial(t_1', \ldots, t_{n-1}')}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})} = c_{nn}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} c_{ii}^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\psi(K) = \prod_{j=1}^{n} \zeta(j)^{-1} \mid \prod_{i=1}^{n} c_{ii}^{-(n-1)} \mid$$

$$\int \dots \int \int \dots \int f(X_1', \dots, X_{n-1}', t_1' X_1' + \dots + t_{n-1}' X_{n-1}' + kX') \, dt_1' \dots$$

$$\dots dt_{n-1}' \, dX_1' \dots dX_{n-1}'$$

und wegen $k = \prod_{i=1}^{n} c_{ii}$ die Behauptung.

4. Wir definieren zahlentheoretische Funktionen

$$\varrho_1(k), \varrho_2(k), \varrho_3(k), \dots$$

durch

$$\varrho_1(k) = 1$$

und durch die Rekursionsformel

$$\varrho_m(k) = \sum_{d/k} d^{m-1} \varrho_{m-1}(k/d) \tag{5}$$

(Für $n > m$ gilt, wie nebenbei bemerkt sei,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varrho_m(k)}{k^n} = \zeta(n) \, \zeta(n-1) \dots \zeta(n-m+1)).$$

Lemma. Im R_n existieren genau $\varrho_n(\mid k \mid)$ Klassen K mit $d(K) = k$.

Beweis des Lemmas durch vollständige Induktion nach n. Wir dürfen $k > 0$ voraussetzen. Im R_1 ist das Lemma richtig. Nehmen wir an, das Lemma sei für R_{n-1} bewiesen. Es soll nun für den R_n hergeleitet werden.[2]

Setzen wir

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1' + c_1 e_n \\ g_2 &= g_2' + c_2 e_n \\ &\vdots \\ g_{n-1} &= g_{n-1}' + c_{n-1} e_n \\ g_n &= d e_n. \end{aligned}$$

[2] *Zusatz bei der Korrektur:* Äquivalenzklassen K von n-tupeln $(h_1, \dots, h_n)$ können als Äquivalenzklassen von $n \times n$-Matrizen mit Spaltenvektoren $h_1, \dots, h_n$ aufgefaßt werden. In § 4 bezeichnen nun ausnahmsweise $g_1, \dots, g_n$ die Zeilenvektoren dieser Matrizen. Eine Matrix mit Zeilenvektoren $g_1, \dots, g_n$ ist äquivalent einer Matrix mit Zeilenvektoren $\breve{g}_1, \dots, \breve{g}_n$ genau dann, wenn $g_1, \dots, g_n$ und $\breve{g}_1, \dots, \breve{g}_n$ dasselbe Gitter aufspannen. Daher ist die Zahl der Äquivalenzklassen mit Determinante k gleich der Anzahl der Punktgitter mit relativer Determinante k über dem natürlichen Gitter.

Durchläuft $g_1', \ldots, g_{n-1}'$ ein Repräsentantensystem aller K mit $d(K)=k/d$ im R_{n-1} aller durch $e_1, \ldots, e_{n-1}$ aufgespannten Punkte, durchlaufen weiter die Zahlen c_j die ganzzahligen Werte $0 \leq c_j < d$ $(1 \leq j \leq n-1)$ und läuft d über alle Teiler von k, so durchläuft $g_1, \ldots, g_n$ ein Repräsentantensystem aller K mit $d(K) = k$ des R_n. Folglich gilt für die Zahl $Z_n(k)$ der Klassen K mit $d(K) = k$ im R_n

$$Z_n(k) = \sum_{d/k} d^{n-1} Z_{n-1}(k/d),$$

also dieselbe Rekursionsformel wie für $\varrho_n(k)$, woraus $Z_n(k) = \varrho_n(k)$ folgt.

Daraus folgt unmittelbar das Hauptergebnis der Arbeit, nämlich *Satz 4.*

$$\int_{F(\mathfrak{L}/\mathfrak{U})} \sum_{(g_1, \ldots, g_n) \in H_n} f(Ag_1, \ldots, Ag_n)\, d\omega = \prod_{j=2}^{n} \zeta(j)^{-1} \sum_{k \neq 0} \frac{\varrho_n(|k|)}{|k|^{n-1}}$$

$$\int \ldots \int \int \ldots \int f(X_1, \ldots, X_{n-1}, t_1 X_1 + \ldots + t_{n-1} X_{n-1} + kX)\, dt_1 \ldots$$

$$\ldots dt_{n-1}\, dX_1 \ldots dX_{n-1}.$$

5. Es wäre leicht, ein Analogon zu Satz 3 aus I aufzustellen, und

$$\int_{F(\mathfrak{L}/\mathfrak{U})} \sum_{g_1, \ldots, g_k} f(A g_1, \ldots, A g_k)\, d\omega$$

zu berechnen, wenn $k \geq n$. Die Formeln, die man dabei erhält, sind kompliziert. Außerdem stellt sich heraus, daß sie im allgemeinen auch dann divergieren, wenn $f(X_1, \ldots, X_k)$ beschränkt ist und außerhalb eines beschränkten Bereiches verschwindet. Deshalb wurde von ihrer Aufstellung abgesehen.

Printed in Austria

Buchbesprechungen

Sto zadań. Von *H. Steinhaus*. Mit 165 Textabb., 196 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. Cena zl. 15.—.

Dies ist eine Sammlung von hundert mathematischen Problemen leichterer und schwierigerer Art, sowohl unterhaltsam als auch lehrreich. Es sind Probleme aus zahlreichen verschiedenen Gebieten und viele sind hier zum ersten Mal in einem Buch erschienen. Die Kapitel sind: 1. Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen. 2. Punkte, Polygone, Kreis, Ellipse. 3. Räumliche Aufgaben, Polyeder, Kugel. 4. Praktische und nicht praktische Aufgaben. Die letzten drei Kapitel enthalten verschiedene eingekleidete Aufgaben, z. B. über das Schachbrett, über elliptische Billardspiele u. a. m. Die Lösungen der hundert Aufgaben sind vollständig ausgeführt und von zahlreichen schönen Figuren begleitet. Jeder Liebhaber der Mathematik wird sich über dieses Büchlein freuen, von dem hoffentlich bald eine Übersetzung erscheinen wird. *K. Prachar*, Wien

Arithmetik. Von *P. B. Fischer*. Dritte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 47.) Mit 19 Textabb., 152 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM. 2.40.

Die vorliegende dritte Auflage des Büchleins unterscheidet sich von der 1938 erschienenen ersten, welche in Mh. Math. **47** besprochen wurde, nur durch ganz geringfügige Ergänzungen und Änderungen und kann zur Wiederholung und Vertiefung der in der Mittelschule erworbenen Kenntnisse aus Arithmetik durchaus empfohlen werden. *W. Nöbauer*, Wien

Lehrbuch und Aufgabensammlung der Mathematik für die 1. und 2. Klasse der Mittelschulen. Von *E. Ludwig* und *J. Laub*. Mit 231 Textabb., VII, 306 S. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky. 1957. Geb. S 46.—.

Für den Mathematikunterricht an der Unterstufe unserer Mittelschulen wurde bisher als Lehr- und Übungsbuch meist das Buch von *Prowaznik* und *Klusacek* verwendet, während sich für den Unterricht der Oberstufe die von *Ludwig* und *Wühr* vorgenommene Neubearbeitung der Aufgabensammlung von *Rosenberg* — in der auch der Lehrstoff selbst knapp, aber gut verständlich dargestellt ist — als unentbehrliches Hilfsmittel erwiesen hat. Dieses bisher nur für die Oberstufe existierende Unterrichtswerk soll durch den vorliegenden und einen für die 3. und 4. Klasse bestimmten, in Vorbereitung befindlichen Band „nach unten" fortgesetzt werden.

Das Erscheinen des Buches ist vor allem aus zwei Gründen sehr willkommen: Einerseits bereiten ja gerade an der Unterstufe der Mittelschule dem Mathematiklehrer viele Dinge große methodische Schwierigkeiten; bei ihrer Überwindung wird ihm die klare und übersichtliche Darstellung des Lehrstoffes, wie sie hier erfolgt, eine wertvolle Hilfe geben, während für den Schüler vor allem die bei jeder Lehrstoffeinheit ausgeführten Musterbeispiele von Nutzen sein werden. Andererseits soll die Anzahl der zur Verfügung stehenden Übungsaufgaben in der Mittelschule möglichst groß sein; mit den in diesem Buch ent-

haltenen 4460 Aufgaben und den Aufgaben aus dem Buch von *Prowaznik-Klusacek* wird aber jeder Lehrer auskommen; hervorzuheben sind die vielen „eingekleideten" Aufgaben aus Gebieten, für die gegenwärtig bei unseren 10- bis 12jährigen Schülern besonderes Interesse vorhanden ist, z. B. Sport, Technik usw.; solche Aufgaben kann ja der Lehrer nur unter beträchtlichem Arbeitsaufwand selbst zusammenstellen.

Das Buch, das in Inhalt und Gliederung natürlich dem gegenwärtig in Österreich gültigen Lehrplan entspricht, also in Arithmetik die vier Grundrechnungsarten mit Dezimalzahlen und Brüchen sowie die Schlußrechnungen und ihre Anwendung umfaßt, in Geometrie vor allem die grundlegenden Eigenschaften von Dreieck, Viereck, Kreis und einigen einfachen Körpern, wird bestimmt bald an allen österreichischen Mittelschulen Verwendung finden.

W. Nöbauer, Wien

Stereometrie. Von *M. Miller*. (Sammlung Crantz.) Mit 102 Textabb., 100 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1957. DM 4.60.

An sehr interessanten Beispielen führt der Verfasser die Leser durch das Gebiet der Stereometrie und führt dabei elementare Rechnungen an der Pyramide, dem Prisma, den fünf regelmäßigen Polyedern, dem ebenflächigen Prismatoid, dem Drehkegel und Drehzylinder und an Kugelteilen vor. Zu 62 Übungsaufgaben sind Lösungshinweise und die Ergebnisse angegeben. Dadurch ist das Büchlein vorzüglich zum Selbststudium auch jener Leser geeignet, die über keine tiefgründige mathematische Ausbildung verfügen. Schöne Figuren begleiten den Text.

Dem Fachmann wie dem mathematisch interessierten Leser wird dieses Büchlein viel Freude bereiten. *J. Laub*, Wien

Calcolo delle matrici. Von *S. Cherubino*. (Monografie Matematiche: Band 4.) VII, 322 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1957. Lire 4000.

Die Theorie der Matrizen hat in Italien eine alte, auf *Gaetano Scorza* zurückgehende Tradition, dessen bekanntes Buch „Corpi numerici e algebre" (1921) die Grundzüge der Matrizenrechnung enthält und sie zur Konstruktion von Algebren benutzt. Aber nicht nur diese rein algebraischen Fragestellungen haben das Interesse an der Matrizenrechnung wach gehalten, sondern fast noch mehr die Probleme der *Riemannschen Matrizen*, die ebenfalls von *Gaetano Scorza* intensiv studiert worden waren; daraus folgten viele neuartige Beziehungen zur Theorie analytischer Funktionen mehrerer Variablen, den Abelschen Funktionenkörpern, und zu den durch derartige Funktionen parametrisierten algebraischen Mannigfaltigkeiten, den Abelschen Mannigfaltigkeiten. Die Herkunft aus diesem geistigen Erbe ist auch dem vorliegenden Lehrbuch der Matrizenrechnung deutlich aufgeprägt, wenn es sich auch im einzelnen den heutigen Erfordernissen entsprechend anpaßt.

In den beiden ersten Kapiteln wird der formale Kalkül entwickelt und die grundlegenden Begriffe eingeführt. Verf. geht hier von dem Satz aus, daß eine Matrix durch gewisse „elementare" Operationen in eine Dreiecksmatrix übergeführt werden kann; dazu müssen allerdings die Elemente einem Körper angehören, was für die zu beweisenden Sätze eine überflüssige Einschränkung ist. Die Einführung leidet so etwas an Geschlossenheit, weil die Kenntnis der Determinantentheorie vorausgesetzt wird und der Begriff des äußeren Produktes nicht vorkommt. Im übrigen aber ist die Darstellung im allgemeinen geschickt gewählt,

sehr breit und ausführlich in den Einzelheiten und leicht verständlich. Das 3. Kapitel enthält Sätze über die Eigenwerte und deren Abschätzungen, die heute besonders aktuell sind, wo ein großer Teil der mathematischen Arbeit dem Dienste an modernen Rechenautomaten untergeordnet wird. Dagegen ist in anderer Hinsicht wieder sehr interessant und bemerkenswert das letzte Kapitel über Matrizenfunktionen, in dem die Theorie analytischer Funktionen hyperkomplexer Variablen nach *Spampinato* dargelegt wird. *W. Gröbner*, Innsbruck

Sur les bases des groupes d'ordre fini. Von *S. Piccard.* (Mémoires de l'Université de Neuchatel: Tome 25.) XXIV, 242 S. Neuchatel: Secrétariat de l'Université. 1957.

Als Basis einer endlichen Gruppe wird ein Erzeugendensystem dieser Gruppe mit kleinstmöglicher Elementezahl bezeichnet, und die Verfasserin stellt in dem Buch verschiedene von ihr erzielte Resultate dar, die mit dem Begriff der Basis in Zusammenhang stehen. Ein Großteil der Untersuchungen beschäftigt sich mit Basen von Permutationsgruppen; dabei sind überaus viele Fallunterscheidungen, Hilfssätze und Rechnungen erforderlich, zumal da sich die Ergebnisse oft auf ganz spezielle Permutationsgruppen beziehen. Das Buch bildet deshalb vor allem eine nützliche Ergänzung unserer Kenntnisse über Permutationsgruppen.

Unter den behandelten Problemen seien erwähnt: Die Frage nach den Basen der symmetrischen und der alternierenden Gruppe, wo ein Element ein Zyklus ist. Die Frage nach der Gesamtzahl aller Basen einer primitiven Permutationsgruppe mit zweigliedriger Basis; man findet hier unter anderem auch eine vollständige Klassifizierung aller Basen für die alternierenden Gruppen A_4, A_5, A_6 A_7 — bei der A_7 sind es 2,308.320 insgesamt! Struktur von imprimitiven Permutationsgruppen. Systeme von Permutationen, die eine reguläre Gruppe erzeugen. Definierende Relationen für die Basen der symmetrischen Gruppe.

W. Nöbauer, Wien

Einführung in die Zahlentheorie. Von *G. H. Hardy* und *E. M. Wright.* Mit 11 Textabb., XVI, 480 S. Nach der dritten Auflage des englischen Originalwerks übersetzt von *H. Ruoff.* München: R. Oldenbourg. 1958. DM 74.—.

Die dritte Auflage des englischen Originalwerkes wurde ausführlich in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **60**, 84 (1956) besprochen. Es wird daher genügen, darauf hinzuweisen und festzustellen, daß die Übersetzung recht flüssig und i. a. sehr korrekt ist. Im Gegensatz zum Originalwerk enthält das Buch ein Sachverzeichnis. Im deutschen Sprachraum werden es die Studenten sehr begrüßen, daß das für sie außerordentlich wichtige Werk nun auch in deutscher Sprache vorliegt.

N. Hofreiter, Wien

Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Von *A. Walfisz.* (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne: Tom 33.) 471 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1957.

Die Wege in der analytischen Zahlentheorie sind lang und mühsam und auch einem zuverlässigen Führer will oder kann der Leser nicht mehr folgen, wenn das Gestrüpp zu dicht wird und weit und breit nichts von einem Ziel zu sehen ist. Es ist daher zu begrüßen, wenn es der Verfasser in diesem originellen Werk unternommen hat, einige Probleme in Buchform darzustellen, die bisher nur in Originalarbeiten, in den verschiedensten Zeitschriften verstreut, zugänglich waren.

Dies umso mehr als man dem Verfasser zusammen mit einigen seiner Schüler wesentliche Beiträge zu diesen Problemen verdankt. Es handelt sich dabei um die Untersuchung der Funktion $P_k(t)$ = Differenz zwischen der Anzahl der Gitterpunkte in der k-dimensionalen Kugel mit Radius $t^{1/2}$ und dem Volumen dieser Kugel.

Schon im ersten Kapitel findet der Leser die Theorie der *Gauß*schen Summen, Darstellung von Zahlen als Summe von vier Quadraten, die *Euler*sche Summenformel, sowie die Auseinandersetzung der „*Hardy-Littlewood*-Methode" für das vorliegende Problem. Zur Abschätzung von $P_4(x)$ nach oben werden die Methoden verwendet, welche von *Weyl*, *Hardy-Littlewood*, *v. d. Corput*, *Vinogradow*, *Hua* für die Abschätzung trigonometrischer Summen entwickelt wurden; als bestes Resultat ergibt sich $P_4(x) = O\,(x(log\ x)^{3/4}\,(loglog\ x)^{1/4})$. Im dritten Kapitel folgen verschiedene Resultate über die Folge $P_k(t)/t^{k/2-1}$, $k > 4$ (für $t \to \infty$), welche vor allem von *Jarnik* untersucht wurde. Sätze von *Petersson*, welche vor allem eine asymptotische Formel für $P_k(n)$ geben und auch Schlüsse über das Vorzeichen von $P_k(n)$ gestatten, sowie eine bekannte *Hardysche* Identität über die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von 5, 6, 7, 8 Quadraten enthält Kapitel 4. Darauf folgen verschiedene weitere asymptotische Formeln vom Verfasser und von *Lursmanaschwili*. Kapitel 6 und Kapitel 7 sind der Untersuchung der Häufigkeitsgrenzen von $P_k(t)/t^{k/2-1}$ gewidmet und enthalten einige komplizierte Rechnungen. Darauf folgen in zwei weiteren Kapiteln verschiedene Resultate über die Mittelwerte von $P^{42}(t)$ und $P_k^2(t)$. Das Schlußkapitel behandelt die Verallgemeinerung der berühmten *Hardy*schen Entwicklung für $P_2(t)$ (genauer $P_2(t+0) + P_2(t-0)$) in eine Reihe nach *Bessel*funktionen.

Leider müssen wir uns mit dieser fragmentarischen Inhaltsübersicht begnügen. Besonders hervorzuheben sind noch die klare und gleichmäßig gut verständliche Art der Darstellung, sowie sehr gründliche Quellenangaben (in einem eigenen Anhang) und ein Ausblick auf verwandte Probleme, die im Buch nicht behandelt wurden.

Wer das schöne und bedeutende Werk durchstudiert, wird einen guten Teil der Methoden der analytischen Zahlentheorie kennen lernen, aber wohl nur eine schwache untere Abschätzung dafür erhalten, wie viel Mühe der Verfasser für seine dankenswerte Arbeit aufgewendet hat. *K. Prachar*, Wien

Calculus. Von *E. S. Smith*, *M. Salkover*, *H. K. Justice*. Zweite Auflage. XIII, 520 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1958. $ 6.50.

An unseren Universitäten wird die Vorlesung über Differential- und Integralrechnung möglichst exakt gehalten. Ziel ist vor allem, die Hörer zu logisch einwandfreiem Denken zu erziehen und ihnen eine solide Grundlage für das weitere Studium der Mathematik zu geben. In den USA ist es anders. Dort wird im ersten Hochschuljahr ein erster Kurs über Differential- und Integralrechnung („Calculus" genannt) gehalten, der auch von Hörern besucht wird, die Mathematik nur als Hilfswissenschaft brauchen. Das vorliegende Buch ist ein Lehrbuch für einen solchen ersten Kurs. Ziel ist, die Hochschüler mit dem Kalkül gründlich vertraut zu machen. Auf eine solide Erklärung auch grundlegender Begriffe (z. B. Integralbegriff) wird verzichtet. Manche auch wichtige Sätze werden nur angeführt, manche (z. B. Kettenregel) mit unzureichenden Mitteln begründet. Anschauliche Überlegungen und zahlreiche durchgerechnete Beispiele sollen zum Verständnis beitragen. Dazu kommen mehr als 5000 Aufgaben mit über 2500 Lösungen. Die Aufgaben sind z. T. aus den Anwendungen entnommen,

so daß der Studierende die Bedeutung der Differential- und Integralrechnung für die Anwendungen erkennt. Zwei Kapitel bringen das Einfachste aus der Analytischen Geometrie des Raumes und über Differentialgleichungen. Studenten, die das Buch durcharbeiten, lernen gründlich differenzieren und integrieren. Die theoretische Ausbildung in der Differential- und Integralrechnung erfolgt erst im zweiten Hochschuljahr. — Die erste Auflage wurde vielfach umgearbeitet, aber der Aufbau im wesentlichen nicht geändert. *N. Hofreiter*, Wien

Höhere Mathematik für den Praktiker. Von *G. Joos* und *Th. Kaluza*. Neunte, verbesserte Auflage. Mit 97 Textabb., XII, 399 S. Leipzig: J. A. Barth. 1958. DM 21.60, geb. DM 23.10.

Die neunte Auflage bringt keine wesentlichen Änderungen gegenüber der erst vor zwei Jahren erschienenen achten Auflage. Ich verweise auf die letzten Rezensionen in dieser Zeitschrift, Mh. Math. **58**, 128 (1954) und **60**, 341 (1956).

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Vektorrechnung für Naturwissenschaftler und Chemiker. Von *H. Sirk*. Mit 60 Abb. in 69 Einzeldarstellungen, XII, 124 S. Darmstadt: Verlag von Dr. D. Steinkopff. 1958. Geb. DM 16.—.

Der Verfasser hielt durch lange Jahre hindurch an der Universität Wien Einführungsvorlesungen aus Mathematik, die in erster Linie für Hörer naturwissenschaftlicher Richtung bestimmt waren. Aus dieser Vorlesungstätigkeit ging die „Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker" hervor, die soeben in achter Auflage erschienen ist. Der Erfolg dieses Werkes ist darin begründet, daß es dem Verfasser besonders gut gelungen ist, sich der naturwissenschaftlichen Denkweise eng anzupassen. In dem genannten Werk wird die Vektorrechnung nicht behandelt. Da aber die Methode der Vektorrechnung in immer stärkerem Maße in Gebiete eindringt, die sich bisher dieses Kalküls nur in geringem Maße oder gar nicht bedient haben, erscheint nun als Ergänzung zu dem genannten Werk eine Einführung in dieses Gebiet, die sich gleichfalls auf eine lange Lehrerfahrung des Verfassers stützen kann.

Der behandelte Stoff umfaßt sowohl Vektoralgebra, als auch Vektoranalysis. Die einzelnen Grundbegriffe werden jeweils anhand von Beispielen aus den verschiedensten Anwendungsgebieten eingeführt. Besonders bemerkenswert ist, daß nicht nur die traditionellen Anwendungsgebiete Berücksichtigung finden, sondern auch solche, in denen die Vektorrechnung noch nicht Allgemeingut geworden ist, wie Chemie, Kristallographie und Meteorologie. Interessant ist es, daß die Vektorrechnung auch in einem neuen und aussichtsreichen Gebiet der Medizin, nämlich in der Elektro- und Vektorkardiographie, Anwendung gefunden hat. Wenn, wie in diesem Fall, auf die Anwendungsmöglichkeiten nur hingewiesen wird, dann findet der Leser zumindest Literaturhinweise, die ihm das weitere Studium wesentlich erleichtern. Die Darstellung ist überaus anschaulich, verzichtet jedoch, vor allem in der Vektoranalysis auf exakte Beweise, sondern begnügt sich damit, den Sachverhalt plausibel zu machen. Auf diesen Umstand sollte der Leser zweckmäßiger Weise aufmerksam gemacht werden, da er selbst bei seinem Ausbildungsstand vielleicht noch nicht genügend Beurteilungsfähigkeit besitzt, um das zu erkennen.

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß der Naturwissenschaftler, falls er nicht an sich mathematisch besonders interessiert ist, nur solche Stoffgebiete der Mathematik mit Interesse zu erlernen versucht, bei denen er sofort Anwendungs-

möglichkeiten sieht. Auf diese Forderung nimmt der Verfasser in besonders glücklicher Weise Rücksicht, so daß das Buch sicher dazu beitragen wird, der Vektorrechnung neue Freunde zu verschaffen. *E. Bukovics*, Wien

Vektoren und Matrizen. Von *S. Valentiner*. Achte, erweiterte Auflage der „Vektoranalysis". Mit einem Anhang „Aufgaben zur Vektorrechnung" von *H. König*. (Sammlung Göschen: Band 354/354a.) Mit 35 Textabb., 202 S. Berlin: W. d. Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Von der 1950 unter dem Titel „Vektoranalysis" erschienenen siebenten Auflage des Buches (man vergleiche die Besprechung in Mh. Math. **54**, 358) unterscheidet sich die vorliegende Auflage vor allem im dritten Teil, der wesentlich erweitert wurde. Insbesondere wurden neu aufgenommen die Elemente der Matrizenrechnung, und diese wird dann auch bei der Untersuchung der linearen Vektorfunktionen verwendet; auch der *Gauß*sche Algorithmus zur Auflösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems und seine Anwendung in der Ausgleichsrechnung werden nun behandelt. Ein ebenfalls neu hinzugekommener Anhang enthält 42 Aufgaben zur Vektorrechnung mit sehr ausführlichen Anleitungen zu ihrer Lösung.

Wegen der großen Wichtigkeit der Vektor- und der Matrizenrechnung für die Physik und die Technik wird das bewährte Bändchen den Studenten dieser Fächer in der neuen, modernisierten Fassung erst recht sehr von Nutzen sein.

W. Nöbauer, Wien

Summen-, Produkt- und Integral-Tafeln. Tables of Series, Products, and Integrals. Von *I. M. Ryshik* und *I. S. Gradstein*. XXIII, 438 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 56.—.

Dieses Werk erlebte in der Sowjetunion bereits mehrere Auflagen und kommt nun in deutscher und englischer Übersetzung heraus. Es enthält zunächst Sätze und Formeln über Reihen und Produkte (20 Seiten). Dann folgen umfangreiche Tafeln für unbestimmte Integrale (80 Seiten) und für bestimmte Integrale (120 Seiten). Besonders ausführlich werden die bestimmten Integrale spezieller Funktionen behandelt. Die Integraltransformationen (*Fourier*, *Laplace*, *Hankel*) machen 20 Seiten und die speziellen Funktionen 140 Seiten aus. Dazu gehören: elliptische Integrale und Funktionen, Exponentialintegral, Eulersche Integrale, Zylinderfunktionen, Mathieusche Funktionen, Kugelfunktionen, orthogonale Polynome, hypergeometrische Funktionen und die *Riemann*sche Zetafunktion. Mit Rücksicht auf die ausführliche Behandlung der speziellen Funktionen kann das Buch als Nachschlagewerk benutzt werden. Nach vielen Formeln werden Quellenangaben gemacht. Die Anordnung ist übersichtlich und der Druck auch der komplizierten Formeln sehr gut. Das Werk ist für angewandte Mathematiker ob seines reichen und verläßlichen Inhalts besonders wertvoll.

N. Hofreiter, Wien

Funkcje Rzeczywiste. Band I. Von *R. Sikorski*. (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne: Band 35.) 534 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958.

Es ist für den Studierenden schwierig, ein einziges Buch zu finden, welches ihm einen Überblick über das gesamte Gebiet der reellen Funktionen vermittelt. Das vorliegende Buch erscheint für diesen Zweck besonders geeignet. Es beginnt

mit einem Kapitel über Funktionen, Mengen und Klassen von Mengen. Dann folgen metrische Räume und ein Kapitel über stetige Funktionen. Kapitel 4 ist mit „Gleichmäßige Konvergenz" überschrieben. Es enthält z. B. den *Bernstein*schen Beweis des *Weierstrass*schen Approximationssatzes. Das darauffolgende Kapitel beschäftigt sich mit den *Baire*schen Funktionen, und in zwei weiteren Kapiteln werden die Maßtheorie und das *Lebesgue*sche Integral, in Kapitel 8 die Maßtheorie in Produkträumen und der Satz von *Fubini* behandelt. Dann folgen Funktionen beschränkter Schwankung und ein Kapitel über die Differenzierbarkeit von Funktionen, in dem unter anderem auch die Theorie der Distributionen auseinandergesetzt wird. Ein Schlußkapitel beschäftigt sich mit dem Begriff des *Stieltjes*-Integrales. Die Darstellung berücksichtigt überall die modernsten Ergebnisse. Besonders zu erwähnen sind die sehr zahlreichen Aufgaben, die nach jedem einzelnen Paragraph in den Text eingefügt sind und zu dessen Verständnis wesentlich beitragen. Stets wird Wert darauf gelegt, nicht bei den abstrakten Sätzen stehen zu bleiben, sondern die Theorie bis zu ihrer praktischen Anwendbarkeit zu entwickeln. Bei dieser gründlichen Darstellung bleibt hoffentlich auch noch für den zweiten Band für den Verfasser genug Arbeit zu tun übrig. Aber schon dieser erste wird bald ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden sein, der die moderne Entwicklung der Theorie der reellen Funktionen kennen lernen will.

K. Prachar, Wien

Geometrische Funktionentheorie. Von *G. M. Golusin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 31.) VIII, 438 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. Geb. DM 39,60.

Dieses reichhaltige, vorzüglich der konformen Abbildung gewidmete Werk bringt zunächst die Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, wobei die Extremalprobleme der schlichten Funktionen (Variation der schlichten Funktionen nach *Schiffer* und *Spencer* sowie *Golusin*) eine wesentliche Rolle spielen, sodann wird die schlichte Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Schlitzgebiete behandelt. Es folgt nach der Kontinuitätsmethode die Abbildung auf Kreisgebiete und endlich die konforme Abbildung auf die Kreisscheibe. Transfiniter Durchmesser, Kapazität und das Nevanlinnasche harmonische Maß bilden den Gegenstand eines weiteren Kapitels. Majorantenprinzipe nach dem Schwarzschen Lemma und dem Lindelöfschen Prinzip, Anwendungen auf Zielwerte von ganzen Funktionen, Bedeckungssätze. Die letzten Kapitel sind dem Randverhalten der analytischen Funktionen gewidmet. — Das ausgezeichnete Buch setzt die Kenntnis der Elemente der Funktionentheorie voraus.

H. Hornich, Wien

An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Von *M. J. Lighthill*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Mit 6 Textabb., VIII, 79 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 17 s. 6 d.

G. Temple hat vor kurzem die Distributionen als Klassen von Folgen unendlich oft differenzierbarer Funktionen eingeführt, die schwach gegen ein stetiges Funktional konvergieren und dabei einen von *Mikusinski* stammenden Grundgedanken verwendet. Desselben Konzepts bedient sich auch das vorliegende Buch, welches mit Erfolg bemüht ist, wichtige Ergebnisse und Anwendungen aus der Theorie der Distributionen vor allen Dingen für die Physiker darzustellen. Jedoch wird auf mathematische Strenge größter Wert gelegt. Ein Büchlein mit

verwandter Tendenz und direkt auf den Ideen von *L. Schwartz* beruhend ist bekanntlich vor einiger Zeit von *Halperin* verfaßt worden. Das Kapitel über asymtotische Entwicklung von Fouriertransformierten im vorliegenden Buch verdient besonders hervorgehoben zu werden. Die hier gegebenen Sätze und Methoden beruhen im wesentlichen auf einer geschickten Ausnützung des Riemann-Lebesgueschen Lemmas. Meiner Meinung nach ist das ansprechende und klar geschriebene Buch für jeden geeignet, der sich über die Anfangsgründe der Distributionstheorie orientieren will. *L. Schmetterer*, Hamburg

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales. Band I. Von *L. Robin*. (Collection technique et scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications.) Mit 7 Textabb., XXXV, 201 S. Paris: Gauthier-Villars. 1957. Ffr. 4300.

Es ist an sich schon erfreulich, wenn eine Forschungsstelle für Fernmeldetechnik ein Buch über Kugelfunktionen herausgibt; noch mehr erfreut aber wird der Leser sein, wenn er bemerkt, daß es sich dabei um ein sehr gründliches und doch leicht verständliches Werk über diesen Gegenstand handelt. Der vorliegende erste Band (es soll ein dreibändiges Werk werden) bringt in drei Kapiteln die *Legendre*schen Polynome und die Funktionen zweiter Art mit nicht negativem ganzzahligem Index, die zugeordneten *Legendre*schen Funktionen, die Kugelflächenfunktionen ganzzahliger Ordnung. In einem Anhang werden aus jeder Funktionenklasse die einfachsten Funktionen in einer Tabelle explizit angegeben. Wenn auch der vorliegende Band vor allem die klassischen Dinge über Kugelfunktionen enthält, so ist er doch sehr faßlich geschrieben, enthält viel konkretes Material und wird daher z. B. für den Ingenieur besonders brauchbar sein (insbesondere wird auf manche kleine Irrtümer in anderen Werken verwiesen und diese werden richtiggestellt). Man kann auf das Erscheinen der beiden anderen Bände sehr gespannt sein, von denen eine Inhaltsübersicht bereits in der Einleitung zum vorliegenden Band gegeben wird und welche sehr viele Dinge enthalten werden, die in ähnlichen Werken bisher nicht zu finden waren.

K. Prachar, Wien

Operatorenrechnung. Von *J. Mikusiński*. (Mathematik für Naturwissenschaft und Technik: Band 1.) Mit 177 Textabb., XII, 360 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 37.20.

Es wurde bereits bei der Besprechung der polnischen Ausgabe dieses Buches (Monatshefte 58 (1954), 218) darauf hingewiesen, daß es sich dabei um eine originelle (von der *Laplace* Transformation unabhängige) Einführung in die Operatorenrechnung handelt. Das Werk ist leicht und faßlich geschrieben und bringt eine Menge von interessanten Anwendungen vor allem aus der Elektrotechnik, sowie Übungsaufgaben mit Lösungen. Es ist erfreulich, daß nun eine deutsche Übersetzung nach der zweiten, erweiterten Auflage des polnischen Originals vorliegt, welche dieses schöne Buch unseren Mathematikern, Physikern und Technikern zugänglich macht. *K. Prachar*, Wien

Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus. Von *W. A. Bizadse*. (Mathematische Forschungsberichte: Band V.) Mit 5 Textabb., 58 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: 1957. DM 13.20.

Die zuerst von *Tricomi* behandelten partiellen Differentialgleichungen vom gemischten Typus, die seither zu immer größer werdenden Bedeutung gelangten,

werden hier in der von *M. A. Lawrentieff* gegebenen einfachen Gestalt behandelt. Es werden einige Randwertaufgaben gelöst, wobei ein vom Verfasser formuliertes Extremalprinzip eine Rolle spielt. *H. Hornich*, Wien

Differential Equations: Geometric Theory. Von *S. Lefschetz.* (Pure and Applied Mathematics: Band VI.) Mit 73 Textabb., X, 364 S. New York—London: Interscience Publishers. 1957. $ 9.50.

Dieses Buch ist aus der Monografie *Lectures on Differential Equations* (Princeton University Press, 1948) des Autors hervorgegangen. Wie jene behandelt es im wesentlichen Fragen des qualitativen Verhaltens von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dieses Gebiet der Differentialgleichungstheorie, das neuerlich mehr und mehr Beachtung findet, ist in den letzten fünfzehn Jahren durch den Verfasser weitgehend gefördert worden. Das vorliegende Buch ist ein weiterer und äußerst willkommener Schritt in seinem fortlaufenden Bestreben, in einem größeren Kreis Interesse für diese qualitative Theorie anzuregen und insbesondere die oft nur wenigen Spezialisten bekannten Arbeiten der sowjetischen Schule der Nachfolger *Lyapunov*'s leichter allgemein zugänglich zu machen. Noch mehr als in den *Lectures* stehen geometrische Behandlungsmethoden durchwegs im Vordergrund. Die ersten drei Kapitel, die die topologischen Grundlagen, die Standardexistenz und Eindeutigkeitssätze und die bekannten Tatsachen über die linearen Systeme bringen, sind nur wenig geändert. Die nächsten vier Kapitel beschäftigen sich fast ausschließlich mit der Stabilität im Sinne von *Lyapunov* der trivialen Lösung des allgemeinen n-dimensionalen Systems $x' = P(t)\,x + q(x, t)$, $q(0, t) \equiv 0$. Hier ist der Großteil des Stoffes gegenüber früher neu, im besonderen sind es die hinreichenden Stabilitätsbedingungen der zweiten Methode *Lyapunov*'s ,die sich auf Betrachtungen der sogenannten *Lyapnov*-Funktionen stützen, die Kriterien von *Persidskii*, und die Ergebnisse von *Malkin* über den Zusammenhang der verschiedenen Bedingungen von *Lyapunov*, *Perron* und *Persidskii*. Die neuesten Resultate bezüglich der Umkehrbarkeit der Sätze in *Lyapunov*'s zweiter Methode sind nicht eingeschlossen. Das achte Kapitel behandelt periodische Systeme und die Stabilität periodischer Lösungen. Die restlichen Kapitel sind den zweidimensionalen Systemen gewidmet; und zwar das neunte und zehnte (75 Seiten) den allgemeinen Systemen $x' = P(x, y)$, $y' = Q(x, y)$ wo P, Q im Ursprung verschwinden und in einer Umgebung desselben analytisch sind. Die klassischen Resultate von *Poincaré* und *Bendixson* und die Untersuchungen des Verfassers und seiner Schule über den Index der kritischen Stelle, die Geometrie der Charakteristiken, ihr Verhalten im Unendlichen, und die Existenz von Grenzzyklen stehen hier im Mittelpunkt der Betrachtungen. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz spielt dabei eine vorwiegende Rolle. Kurz werden auch Fragen der Struktur-Stabilität besprochen, deren Begriff auf *Andronov* und *Pontrjagin* zurückgeht und die neuerlich von *De Baggis* eingehend studiert worden ist. Die letzten zwei Kapitel schließlich beschäftigen sich mit Gleichungen zweiter Ordnung, speziell mit der *Liénard*schen Gleichung und den Gleichungen vom *Cartwright-Littlewood* Typ, den Näherungsmethoden von *Poincaré* und von *Krylov* und *Bogolyubov*. Die wichtigen Sätze von *Levinson* und *Smith* über die Existenz von Relaxations-Schwingungen und die von *Cartwright* und *Littlewood*, *Reuter*, und dem Verfasser über die Beschränktheit der Lösungen und die Existenz von erzwungenen periodischen Lösungen sind teils in ihrer Originalform, teils neu, aber stets auf geometrische Betrachtungen gestützt, bewiesen. Das Kapitel über die Methoden der angenäherten Lösung bringt zuerst die Grundlagen betreffs Gleichungen

zweiter Ordnung, die einen kleinen Parameter enthalten, und dann als Illustration Anwendungen auf die Gleichung von *van der Pol* und die *Mathieu*sche Gleichung. Das Buch schließt mit einem Anhang (über die *Jordan* Normalform von Matrizen und über topologische Details des Index in der Ebene und auf einer Fläche) und mit einer kurzen Liste von Problemen, die den Leser zum weitern Eindringen in dieses interessante Gebiet der Differentialgleichungstheorie anregen sollen.

H. A. Antosiewicz, Providence

Kürzeste Linien. Von *L. A. Lusternik*. Mit 102 Textabb., 108 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 7.60.

Oft diskutiert man die Frage — kann, darf und soll man Fragen aus einem mathematischen Wissensgebiet, dessen Beherrschung streng logischer Schlüsse und eines hoch entwickelten mathematischen Formalismus bedarf, gemein verständlich darstellen? Es ist recht beachtenswert, daß ein so bedeutender Mathematiker, wie es der Autor dieses kleinen Büchleins ist, alle drei Fragen mit einem kräftigen „ja" beantwortet. Und noch beachtenswerter ist es, wie er dies tut. Er will nicht streng mathematisch dozieren, er will nur Hilfsmittel aus der Elementarmathematik heranziehen. Über sein Ziel spricht er sich in der Einleitung folgendermaßen aus:

„Die Analysis hat mächtige Hilfsmittel ausgearbeitet, die viele schwierige Aufgaben manchmal automatisch zu lösen gestatten. Jedoch ist es bei jedem Stand des mathematischen Wissens außerordentlich wichtig, die einfache geometrische oder physikalische Bedeutung eines Problems zu erfassen. Man muß auch, wie die Mathematiker sagen, Aufgaben „über den Daumen" zu lösen verstehen, d. h. eine vielleicht nicht strenge, aber einfache und anschauliche Begründung finden können."

Im Beginn des Buches, wo es sich nur um kürzeste Linien auf Polyeder, Kugel und Kegel handelt, wird nur die geometrische Vorstellung ausgenützt. In den späteren Kapiteln aber auch physikalische Betrachtungen (potentielle Energie gespannter Fäden, Fermatsches Prinzip).

Trotz des völlig elementaren Charakters der analytischen Hilfsmittel werden dem Leser Einblicke in interessante Probleme vermittelt. Es kommen u. a. zur Sprache: Das isoperimetrische Problem und zwar nicht nur in der Ebene, sondern auch auf gekrümmten Flächen, das Problem der Brachistochrone, Kettenlinie und das Problem der kleinsten Rotationsfläche, das *Poincaré*-Modell für die Lobatschewskische Geometrie der Ebene. Das Schlußkapitel behandelt den von *Hamilton* entwickelten Zusammenhang zwischen Mechanik und Optik.

P. Funk, Wien

Aufgabensammlung zur höheren Mathematik. Band II. Von *N .M. Günter* und *R. O. Kusmin*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 33.) Mit 24 Textabb., VI, 289 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 19.60.

Der vorliegende zweite Band enthält 1600 Aufgaben zu folgenden Sachgebieten: Partielle Differentialgleichungen (1. Ordnung). Reihen. Näherungsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Gleichungen der mathematischen Physik. Variationsrechnung. Wahrscheinlichkeitsrechung. Schon aus diesen Überschriften wird klar, wie ungemein nützlich auch dieser letzte Band des Werkes für den Studierenden sein wird. Ein Blick auf die einzelnen Aufgaben zeigt dies noch deutlicher. In welcher anderen Aufgabensammlung hätte z. B. der Leser Gelegenheit, Probleme über die Lösung *Fredholm*scher Integralgleichungen, Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen, Nullstellen ganzer

Funktionen, usw. zusammen mit Aufgaben über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Auswertung statistischer Beobachtungen zu finden. Hinweise für die Lösung sind bei allen schwierigeren Aufgaben am Ende des Bandes zusammengestellt. Schon bei der Besprechung des ersten Bandes wurde darauf hingewiesen, daß hier leichte und schwierigere Aufgaben in glücklicher Weise gleichzeitig dargeboten werden — mit einem Wort: *Die* Aufgabensammlung, die jeder braucht, der höhere Mathematik betreiben will.

K. Prachar, Wien

Toeplitz Forms and their Applications. Von *U. Grenander* und *G. Szegö*. (California Monographs in Mathematical Sciences.) VII, 245 S. Berkeley und Los Angeles: University of California Press. 1958. $ 6.—.

Die *Toeplitz*schen Formen sind ein wichtiges Hilfsmittel in der Analysis, und wie man in letzter Zeit erkannt hat, auch von Wichtigkeit für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Diese Formen sind *Hermite*sche Formen, deren Koeffizienten nur von der Differenz der Indizes abhängen. Im Mittelpunkt stehen die Formen, welche mit den von *Szegö* eingeführten orthogonalen Funktionen auf dem Einheitskreis mit beliebigen Gewichtsfunktionen zusammenhängen. Die berühmten und schon bereits klassischen Sätze, welche von *Szegö* herrühren, beschäftigen sich mit dem asymptotischen Verhalten der Minima und der Eigenwerte solcher Formen. Der ganze Fragenkreis hängt mit dem trigonometrischen Momenten-Problem zusammen. Vertiefungen und Verallgemeinerungen dieser Sätze bilden den Inhalt des ersten Teiles. Der zweite Teil bringt Anwendungen auf die Theorie der analytischen Funktionen und auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Es handelt sich vor allem um stationäre stochastische Prozesse, und die Sätze von *Kolmogoroff* und *Wiener* finden eine einfache Darstellung.

Die Darstellung zeigt den klaren und durchsichtigen Stil, der alle Arbeiten und Bücher von *Szegö* auszeichnet. Diese Monografie über *Toeplitz*sche Formen ist sehr zu begrüßen, da sie auch einem dringenden Bedürfnis entspricht und sie wird sicher dem Gegenstand neue Freunde zuführen. Das Buch ist leicht lesbar und erfordert wenig Vorkenntnisse.

E. Hlawka, Wien

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von *B. W. Gnedenko*. (Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abteilung. Mathematische Lehrbücher: Band IX. (Mit 20 Textabb., XI, 387 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1957. Geb. DM 29.50.

Dies ist eine deutsche Übersetzung nach der letzten (zweiten) Auflage (1954) des russischen Werkes, welche von dem Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften, Berlin, besorgt wurde. Der Verfasser schrieb (1957) auch ein Vorwort zur deutschen Ausgabe, in dem einige ergänzende Literaturhinweise enthalten sind.

Bei dem Mangel an deutschsprachigen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist jedes neue Buch an sich willkommen, und dies gilt in umso höherem Maße für ein so ausgezeichnetes Werk wie es von dem Verfasser geschaffen wurde. Das Buch ist einerseits leicht lesbar, macht andererseits keine Konzession hinsichtlich der Strenge und bringt doch die wesentlichsten Tatsachen aus allen Gebieten der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Inhalt: 1. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit. 2. Eine Folge unabhängiger Versuche. 3. *Markow*sche Ketten. 4. Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen. 5. Zahlenmäßige Charakterisierung

der Zufallsgrößen. 6. Das Gesetz der großen Zahlen. 7. Charakteristische Funktionen. 8. Klassische Grenzwertsätze. 9. Die Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. 10. Die Theorie der stochastischen Prozesse. 11. Elemente der Statistik. Im Anhang finden sich historische Hinweise, Tabellen und Literatur.

Wie man sieht, war es vor allem die Absicht des Verfassers, dem Leser möglichst viele konkrete Kenntnisse zu vermitteln und dies bei möglichst geringen Voraussetzungen. Deswegen ist z. B. dem axiomatischen Aufbau ein verhältnismäßig geringer Raum gewidmet und sind im Text zahlreiche Beispiele ausführlich durchgerechnet. Die benötigten Eigenschaften des *Stieltjes*-Integrals (welches erst am Ende des 4. Kapitels eingeführt wird, um die Darstellung möglichst elementar zu halten) werden ohne ausführliche Beweise angegeben. An Speziellem wollen wir nur noch erwähnen: Die Resultate von *Kolmogorov* über die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen; die Sätze von *Helly* über die Grenzwerte von monotonen Funktionen; das ausführliche Eingehen auf die Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, sowie das schöne Kapitel über stochastische Prozesse, in dem außer den *Kolmogorov*schen Grundgleichungen auch Dinge wie die Spektralzerlegung der stationären Prozesse und der Ergodensatz behandelt werden. Auch das — vielleicht etwas fragmentarische — letzte Kapitel über Statistik gibt eine gute Vorstellung von den Grundideen dieses Wissensgebietes. Hervorzuheben ist ferner noch die Bezeichnungsweise. Zahlreiche Übungsaufgaben, denen oft eine Anleitung zur Lösung beigefügt ist, sind am Ende jedes Kapitels beigegeben.

K. Prachar, Wien

Arbeiten zur Informationstheorie I. Von *A. J. Chintschin*, *D. K. Faddejew*, *A. N. Kolmogoroff*, *A. Rényi* und *J. Balatoni*. (Mathematische Forschungsberichte: Band IV.) Mit 2 Textabb., 134 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 18.40.

In diesem Band sind die Arbeiten der Mathematiker *Chintschin*, *Faddejew*, *Kolmogoroff*, *Rényi* und *Balatoni* zur Informationstheorie enthalten. Es ist sehr zu begrüßen, daß diese Arbeiten nun auch in deutscher Sprache zugänglich werden. Besonders hinweisen möchte ich auf die beiden Arbeiten von *Chintschin*, die wohl die beste Darstellung dieses Gebietes sind. Vor allem zeichnen sie sich in gewohnter Weise durch mathematische Präzision und ausführliche Beweise aus. Man kann auf den zweiten Teil gespannt sein. *E. Hlawka*, Wien

Darstellende Geometrie. Band 1. Die wichtigsten Darstellungsmethoden, Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper. Von *W. Haack*. Zweite durchgesehene und ergänzte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 142.) Mit 120 Textabb., 113 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 2.40.

Dieses vornehmlich für Techniker geschriebene, nun schon in zweiter Auflage vorliegende 1. Bändchen (1. Auflage besprochen in Mh. **58**, 316) der dreibändigen Göschenausgabe (2. Bd. besprochen in Mh. **58**, 316, 3. Bd. in Mh. **61**, 260) über Darstellende Geometrie ist seit seiner Erstauflage aus dem Jahre 1954 schon eine beliebte und vielgelesene Einführung geworden. Neben einzelnen sprachlichen Verbesserungen unterscheidet sich diese Neuauflage nur an wenigen Stellen von der Erstauflage und zwar hauptsächlich im Kapitel über Affinitäten. Hier ist eine Behandlung der Längenverzerrung einer Affinität dazugekommen und die Untersuchung der affinen Figur zu einem Kreis wurde erweitert.

H. Brauner, Wien

Analytische Geometrie. Von *K. P. Grotemeyer.* (Sammlung Göschen: Band 65/65a.) Mit 73 Textabb., 202 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1958. DM 4.80.

Die klare und präzise Darstellung bietet in übersichtlicher und doch knapper Weise jenen Stoff, der in einer Universitätsvorlesung über analytische Geometrie üblicherweise zu finden ist. Die notwendige lineare Algebra, Matrizenrechnung und Transformationstheorie der symmetrischen Matrizen wird dabei im Rahmen der geometrischen Problematik behandelt und nur das Notwendigste besprochen. Besonderer Wert wird auf geometrische Veranschaulichung gelegt, die durch die vielen Textfiguren sehr erleichtert wird.

Nach einer Einführung in die Vektoralgebra werden bei Zugrundelegung kartesischer Koordinaten die üblichen Aufgaben über Geraden und Ebenen besprochen (im Zusammenhang mit der Hesseschen Normalform hätte der Begriff der orientierten Ebenen vielleicht mehr betont werden sollen). Ein kurzer Abschnitt ist den Kugeln gewidmet. Nach einer Einführung in das Matrizenkalkül werden die affinen Transformationen, die Bewegungen und Ähnlichkeiten behandelt, ihre wichtigsten Invarianten sowie ihre Klassifikation nach dem Rang der Transformationsmatrix. Daran schließt sich eine metrische Klassifikation der Quadriken, Besprechung ihrer wesentlichsten geometrischen Eigenschaften. Die letzten Abschnitte sind der projektiven Geometrie des Raumes gewidmet (jedoch unter starker Stoffbeschränkung). Nach den homogenen kartesischen Koordinaten werden Kollineationen, Korrelationen und projektive Koordinaten eingeführt und die Quadriken im Rahmen der projektiven Geometrie untersucht (Erzeugung nach *Staudt, Steiner, Seydewitz* und Klassifikation).

Jedem Studierenden, der eine leicht lesbare, gut gegliederte erste Einführung in die analytische Geometrie des Raumes sucht, kann dieses Büchlein wärmstens empfohlen werden. *H. Brauner*, Wien

Differentialgeometrie. Von *E. Kreyszig.* (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A: Band 25.) Mit 105 Textabb., XI, 421 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1957. Geb. DM 36.—.

Das vorliegende Buch ist eine Einführung in die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes, die vor allem durch die exakten Formulierungen, das richtige Maß an Ausführlichkeit und den methodisch meisterhaftem Aufbau besticht. Obwohl das behandelte Sachgebiet bereits in einer Unzahl von Büchern verarbeitet wurde, ist trotzdem stets die persönliche Note des Autors zu spüren. In der Flächentheorie wird von der Tensoranalysis Gebrauch gemacht, wodurch das Verständnis für die Riemannsche Geometrie der Räume beliebiger Dimension weitgehend vorbereitet wird. Man mag die Frage nach dem der Flächentheorie adäquaten Kalkül beantworten wie man will; ist einmal die Wahl auf das Tensorkalkül gefallen, so wird kaum eine bessere Darstellung als die hier gebotene möglich sein. Die große Zahl der durchwegs erstklassigen Textfiguren beweist, daß bei aller Eleganz der Methode und dem hohen Maß an mathematischer Strenge doch stets Wert auf geometrische Anschaulichkeit gelegt wurde. Eine große Zahl von Aufgaben, deren Lösungen am Schluß des Buches ausführlich mitgeteilt werden und die vor allem der Einübung und Vertiefung des Stoffes dienen und kaum zusätzliche prinzipielle Erkenntnisse vermitteln, sowie eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln, Begriffe und Definitionen erhöhen die Lesbarkeit des Buches außerordentlich und tragen dazu bei, dieses Buch in die allererste Reihe der Lehrbücher über Differentialgeometrie zu rücken.

Ein kurzer Inhaltsüberblick: Einführung in die Vektorrechnung, Kurventheorie (im üblichen Umfang), 1. Grundform der Flächentheorie, Tensorbegriff, Krümmungstheorie, innere Geometrie, Abbildung von Flächen aufeinander (u. a. Auffindung einer konform invarianten Metrik der komplexen Ebene mittels der Bergmannschen Kernfunktion), Kartenentwürfe, absolute Differentiation und Parallelverschiebung, spezielle Flächen (Minimalflächen, Betragsflächen analytischer Funktionen, Torsen, Flächen konstanter Gaußscher Krümmung und ihre innere Geometrie). Es werden kaum Querverbindungen zur Variationsrechnung behandelt, noch Fragen der Differentialgeometrie im großen (Satz von *Gauß-Bonnet* abgesehen), dafür aber in stärkerem Umfang als sonst üblich Zusammenhänge zur klassischen Funktionentheorie. *H. Brauner*, Wien

Differentialgeometrie. Teil II. Von *A. P. Norden*. Mit 60 Textabb., VIII, 124 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 7.40.

Bezüglich der allgemeinen Charakterisierung der von *R. Sulanke* aus dem Russischen übersetzten *Norden*schen Differentialgeometrie sei auf die Besprechung des 1. Bandes (Mh. **61**, 373) verwiesen. Der vorliegende zweite Teil behandelt die Flächentheorie unter Verwendung der Gaußschen quadratischen Differentialformen in vektorieller Schreibweise. Nur an einzelnen Stellen wird das begleitende Dreibein einer Fläche eingeführt, so etwa zu einer sehr eleganten Herleitung des Theorema egregium. Besonders durch die zahlreichen in den Text eingestreuten Aufgaben, die mit Lösungsanleitungen versehen sind, wird eine Fülle echter Geometrie unter weitgehendster Beschränkung des formalen Apparates gewonnen. Das anschauliche Moment, noch betont durch die Textfiguren, steht in Darstellung und Stoffauswahl stark im Vordergrund, so daß vor allem für eine erste Bekanntschaft mit der Differentialgeometrie das *Norden*sche Werk einen idealen Führer darstellt. Die Kapitelüberschriften: Krummlinige Koordinaten, Krümmung einer Kurve auf einer Fläche, besondere Linien und Netze auf einer Fläche, innere Geometrie der Flächen, Parallelübertragung. *H. Brauner*, Wien

Kontinuierliche Geometrien. Von *F. Maeda*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 95.) Mit 12 Textabb., X, 244 S. Berlin-Göttingen- Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 36.—, geb. DM 39.—.

Der Zusammenhang zwischen projektiver Geometrie und Verbandstheorie wurde im Jahre 1935 von *Birkhoff* und *Menger* entdeckt: Die Gesamtheit der linearen Teilräume eines projektiven Raumes mit der Enthaltenseinsbeziehung als Ordnung bildet einen atomaren, nach oben stetigen komplementären modularen Verband, und umgekehrt ist die Gesamtheit der Atome jedes solchen Verbandes ein projektiver Raum. Man kann also eine projektive Geometrie stets als derartigen Verband auffassen. Bei geeigneter Wahl der Dimensionsdefinition haben alle Elemente dieses Verbandes als Dimension eine der Zahlen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Wie nun *J. v. Neumann* 1936 bewiesen hat, gibt es irreduzible stetige komplementäre modulare Verbände, in denen als Werte der Dimension alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 auftreten, wo es also Elemente beliebig kleiner Dimension gibt, so daß geometrisch gesprochen die Begriffe „Punkt" und „Gerade" ihren Sinn verlieren. Man bezeichnet diese Verbände deshalb als kontinuierliche Geometrien. *V. Neumann* zeigte weiter, daß ein komplementärer modularer Verband der Ordnung $n \geqq 4$ stets isomorph ist zum Hauptrechtsidealverband eines Matrizenringes über einen gewissen Ring und

begründete damit auch eine „Darstellungstheorie" der kontinuierlichen Geometrien. An der Weiterentwicklung und Verallgemeinerung der Ergebnisse *v. Neumanns* war neben anderen japanischen Mathematikern *F. Maeda*, der Verfasser dieses Werkes, maßgeblich beteiligt.

Das Buch — eine Übersetzung aus dem Japanischen; die Originalausgabe ist 1952 erschienen — stellt die Theorie der kontinuierlichen Geometrien in klarer, übersichtlicher Form von Grund auf dar, beginnend mit den Elementen der Verbandstheorie. Sein Studium erfordert daher kaum Vorkenntnisse und ermöglicht es dem Leser, dieses interessante Gebiet gründlich kennenzulernen. Man muß den Übersetzern und dem Verlag dankbar sein dafür, daß sie dieses bedeutende Werk der gesamten mathematischen Welt zugänglich gemacht haben.

W. Nöbauer, Wien

Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Von *H. Hadwiger*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 93.) Mit 34 Textabb., XIII, 312 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. DM 46.20, geb. DM 49.80.

In der Mathematik gibt es zahlreiche alte Probleme, für die schon lange schöne Lösungen gefunden wurden, die aber trotzdem neue und interessante Lösungen gezeitigt haben. Dazu gehören auch die Probleme über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. So kann man als Untertitel dieses Buches wählen: alte Probleme, aber neue Lösungen. Der Autor war wie kein zweiter berufen, das interessante Buch zu schreiben. Er konnte im Literaturverzeichnis auf 73 seiner Arbeiten hinweisen.

In dem Buch werden verschiedene Gebiete zu einem einheitlichen Ganzen zusammengefügt. Bevorzugt wird die Mengengeometrie und die Maßtheorie, während die analytischen Methoden weitgehend ausgeschaltet werden konnten. Dadurch werden Differentierbarkeitseigenschaften kaum benötigt, die in der Differentialgeometrie stets vorausgesetzt werden. Die direkte mengengeometrische Betrachtungsweise faßt die Körper als Gesamtheit der ihr angehörenden Punkte auf. Die direkten Schlüsse der Mengengeometrie sind i. a. einfacher und allgemeiner als die analytischen Methoden. Die im 1. Kapitel entwickelte Polyedergeometrie dient als Grundlage für den Aufbau der elementaren Inhaltslehre. Mit Hilfe der Zerlegungstheorie der Polyeder werden Polyederinhalt ohne Grenzbetrachtungen begründet. Die translationsinvariante Inhaltstheorie wird axiomatisch aufgebaut. Wenige Postulate definieren implizit das allgemeine Inhaltssystem, das den Polyederinhalt, den Jordanschen Inhalt und den Tarskischen Inhalt als Spezialfälle enthält. Eine wichtige Rolle spielen in dem Buch die Minkowskischen Operationen der Addition und Subtraktion, seine Theorie der Oberfläche und der konvexen Körper. Erwähnt sei auch die Brunn-Minkowskische Ungleichung. Im Rahmen der Mengengeometrie und der Maßtheorie werden die Untersuchungen über Isoperimetrie geführt. Das Buch bringt eine Herleitung der allgemeinsten im euklidischen Raum gültigen isoperimetrischen Ungleichung. Das Schlußkapitel ist der Theorie der konvexen Körper mit ihren fundamentalen Maßzahlen und der Integralgeometrie gewidmet. Erst in diesem Kapitel werden Integrale verwendet. Zusammenfassend kann gesagt werden: Das Buch gibt eine vorzügliche Synthese von alten und neuen Ergebnissen, die der Mengengeometrie, der Inhaltslehre, der Theorie der konvexen Körper und der Integralgeometrie angehören. Die Erwähnung vieler ungelöster Probleme gibt viel Anreiz zu weiteren Untersuchungen.

N. Hofreiter, Wien

Convexity. Von *H. G. Eggleston.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics; Nr. 47.) Mit 15 Textabb., VIII, 136 S. Cambridge: At the University Press. 1958. 21 s.

Das vorliegende Buch bringt eine Einführung in die Theorie der konvexen Mengen, wobei gleichzeitig Allgemeinheit und Einfachheit angestrebt wird. Dementsprechend wird mit Ausnahme der zwei letzten Kapitel der n-dimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt. Die Arbeitsmethode ist die der Mengengeometrie, die nur die Grundlagen der Punktmengenlehre, der reellen Analysis und der Geometrie voraussetzt.

Das 1. Kapitel bringt die grundlegenden Eigenschaften konvexer Mengen, die im 2. Kapitel auf den Problemenkreis des *Helly*schen Satzes angewendet werden. Nun erklärt Verf. die wichtigen Begriffe der konvexen Funktion, Richtungsableitung, Stützfunktion u. ä. und beweist darüber die im 5. Kapitel benötigten Tatsachen. Im Mittelpunkt des 4. Kapitels steht der Auswahlsatz von *Blaschke*, auf dem fast alle geometrischen Extremaltheoreme beruhen. Dann wird die Minkowskische Theorie bis zum Brunn-Minkowskischen Satz geführt, für den zwei Beweise erbracht werden. Die beiden letzten Kapitel gelten speziellen Problemen: isoperimetrische Ungleichung und einige neuere Resultate u. a. von *Besicovitch* und dem Verf.

In dem engen Rahmen konnte natürlich nur eine Auswahl aus dem Gebiet gebracht werden. Die Darstellung ist durchwegs sehr klar, die Beweise sind vollständig durchgeführt, wobei auch auf die Methode großes Gewicht gelegt wird. Hervorzuheben ist, daß jedem Abschnitt Übungsbeispiele angeschlossen sind. Der Verf. versäumt es auch nicht, auf offene Fragen hinzuweisen. Ein Verzeichnis der Quellen und der weiterführenden Literatur beschließt diese ausgezeichnete Einführung in ein Gebiet, das u. a. die Grundlage für die Geometrie der Zahlen bildet. *A. Florian,* Graz

Problems in Euclidean Space: Application of Convexity. Von *H. G. Eggleston.* (International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics: Band 5.) Mit 31 Textabb., VIII, 165 S. London-New York-Paris-Los Angeles: Pergamon-Press. 1957. 40 s.

Bei der Formulierung und bei der Lösung zahlreicher mathematischer Probleme spielt der Begriff der Konvexität eine wichtige Rolle. Die vorliegende Monographie bringt eine Auswahl von zehn solchen Problemen, die sich auf den zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum beziehen. Zu ihrer Lösung erbrachte der Verfasser selbst sehr bedeutende Beiträge. Die Probleme sind so angeordnet, daß der Begriff der Konvexität dabei immer mehr in den Mittelpunkt rückt. Im 1. Abschnitt, der drei Fragestellungen umfaßt, bilden gewisse Eigenschaften von konvexen Mengen den Ausgangspunkt für allgemeinere mengentheoretische Untersuchungen oder es wird die Konvexität als Hilfsmittel verwendet. Der 2. Abschnitt enthält den sehr interessanten, allgemeinen Beweis des Verfassers für die Borsuksche Vermutung im dreidimensionalen Raum, die im n-dimensionalen Raum so lautet: Jede Punktmenge mit dem Durchmesser d läßt sich in $n + 1$ Teilmengen zerlegen, die Durchmesser kleiner als d haben. Im R_n wurde diese Vermutung unter einer gewissen Einschränkung bekanntlich von *H. Hadwiger* bewiesen. Im 3. Abschnitt werden gewisse von *L. Fejes Tóth* aufgeworfene Fragen im Zusammenhang mit der Annäherung von konvexen Kurven durch Polygone beantwortet. Die Ergebnisse stellen Analoga zu den Dowkerschen Sätzen dar. Solche Approximationen sind für Lagerungs- und Überdeckungsprobleme in der Geometrie der Zahlen von Bedeutung. Daran schließen sich Theoreme, die die Dreiecke als Extremalkurven unter den kon-

vexen Kurven auszeichnen. Der letzte Abschnitt behandelt Mengen konstanter Breite, sowie ein Extremalproblem für Dreiecke und ein Packungsproblem.

Obwohl die Behandlung solcher Probleme in der Regel keine höheren Vorkenntnisse erfordert, bieten die Beweise der oft bestechend einfachen Aussagen manchmal sehr große Schwierigkeiten und sind teilweise auch sehr langwierig. Der Verfasser macht auch auf zahlreiche noch ungelöste Probleme aufmerksam. Die Darstellung ist sehr klar und lückenlos, die Gliederung ausgezeichnet. Das Buch wird jedem Mathematiker, der sich mit Fragen der Konvexität befaßt, wertvolle Anregungen bringen. *A. Florian*, Graz

Was ist eine Kurve? Von *A. S. Parchomenko*. Mit 23 Textabb., 140 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1957. DM 8.20.

Dieses Buch ist sowohl für Lehrer an den Mittelschulen als auch zur Ergänzung der Vorlesungen für Studenten gedacht. Es enthält eine elementare und (bei den russischen Büchern bereits gewohnte) klare Darstellung der mengentheoretischen Begriffsbildungen, die für eine einwandfreie Kurven-Definition notwendig sind. Kapitelüberschriften: 1. Die Entwicklung des Kurvenbegriffes. 2. Einige Tatsachen aus der Theorie der Punktmengen. 3. *Cantor*sche Kurven. 4. Allgemeine Kurvendefinition. Anhang: Über den Dimensionsbegriff. Es sei nur erwähnt, daß man im 4. Kapitel u. a. auch eine Beschreibung der *Menger*schen „universalen" Kurve des dreidimensionalen Raumes findet, welche zu jeder Kurve des n-dimensionalen Raumes ein topologisches Bild als Teil enthält. Der Leser wird außer zahlreichen konkreten Einzelresultaten auch ein gutes Stück der allgemeinen Topologie kennen lernen, wenn er das Buch studiert.

K. Prachar, Wien

Geometry of Einsteins Unified Field Theory. Von *V. Hlavaty*. XXXII, 341 S. Groningen: P. Noordhoff. 1958. $ 9.—, geb. $ 9.75.

Die Idee einer einheitlichen Feldtheorie ist 40 Jahre alt. Bereits 1918 versuchte *H. Weyl* durch Erweiterung der geometrischen Grundlagen neben *A. Einsteins* weltgeometrischer Deutung der Gravitation als Krümmungseigenschaft des raumzeitlichen Kontinuums auch noch das elektromagnetische Feld weltgeometrisch zu interpretieren. Da es jedoch nicht gelang, die von der Wellenmechanik geforderte Existenz scharfer Spektrallinien durch die neue Theorie in Evidenz zu setzen, sah sich *Weyl* gezwungen, seine (mathematisch überaus bestechende) Theorie wieder aufzugeben. Ähnlich erging es zahlreichen anderen Versuchen. Stets waren es die Forderungen der Physik, insbesondere die der Quantentheorie, welche sich nicht in den jeweils gewählten weltgeometrischen Rahmen einfügen wollten. Auch wurde das Problem immer komplizierter, je mehr neue physikalische Felder (Mesonenfelder) als physikalische Realitäten entdeckt wurden. Sollten auch diese weltgeometrisch erfaßbar sein? Schließlich konnte man dreierlei Tendenzen zum Aufbau einheitlicher Feldtheorien unterscheiden: (1) einheitliche Feldtheorie von Gravitation und elektromagnetischem Feld (im Sinne von *A. Einstein*), (2) einheitliche Feldtheorie von Gravitation, elektromagnetischem Feld und Mesonenfeld (im Sinne von *E. Schrödinger*), (3) einheitliche Feldtheorie der verschiedenen quantentheoretischen Wellenfelder (im Sinne von *W. Heisenberg*). Für die Beschreibung des Gravitationsfeldes hatte sich in der Einsteinschen Theorie der zehnkomponentige symmetrische Tensor $h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda}$ bewährt, für die (Maxwellsche) Theorie des elektromagnetischen Feldes der sechskomponentige schiefsymmetrische Tensor $k_{\lambda\mu} = -k_{\mu\lambda} (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$. Beschränkt man sich also auf eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus, so wird man als deren einheitliches Tensorfeld ein sechzehnkomponentiges

Tensorfeld erwarten. Nach zahlreichen physikalisch fehlgeschlagenen Versuchen entschloß sich *A. Einstein* in dem Jahre 1950, den formal einfachsten Weg zu gehen und den gravito-elektromagnetischen Feldtensor einfach als Summe von $h_{\mu\lambda}$ und $k_{\mu\lambda}$ anzusetzen. Dieser Weg wurde von mathematischer Seite zunächst als ungerechtfertigte Kombination zweier völlig verschiedener Tensoren angesehen, da die Tensorfelder $h_{\lambda\mu}$ und $k_{\lambda\mu}$ als irreduzible Bestandteile des reduziblen Tensorfeldes $g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu}$ erscheinen. Demgegenüber verweist *A. Einstein* auf die Bedeutung der Determinante $|\, g_{\lambda\mu}\,|$, deren Nichtverschwinden und relativer Invariantencharakter die Zuordnung von kontra- zu kovarianten Tensoren jetzt auch im asymmetrische Falle ermöglicht, wodurch eine höchst bemerkenswerte Verallgemeinerung und Bereicherung für geometrische Entwicklungsmöglichkeiten geschaffen wurde. Der Aufbau und Ausbau einer solchen „asymmetrischen Weltgeometrie" wurde vor 10 Jahren das Arbeitsgebiet des Verfassers. Das Ergebnis seiner zähen und bewundernswert gründlichen Untersuchungen ist das vorliegende Buch.

Drei geometrische Postulate werden an die Spitze der Theorie gestellt: (A) die einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus wird durch sechzehn Potentiale bestimmt; (B) diese Potentiale bestimmen Krümmung und Torsion des vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums; (C) Die sechzehn Potentiale erscheinen als Lösung eines Systems differentieller Feldgleichungen, welchen Krümmung und Torsion des raumzeitlichen Kontinuums gewisse Bedingungen auferlegen. Die Identifikation von Schwere- bzw. elektromagnetischen Feldern ergibt sich aus den Feldgleichungen. Leider erlaubt es der Platzmagel nicht, darauf näher einzugehen.

Das Buch enthält sechs Kapitel. Deren erstes behandelt in 15 Abschnitten die Algebra des einheitlichen Tensorfeldes $g_{\lambda\mu}$. Kapitel II behandelt (zunächst allgemein, später für die Dimensionszahl $n = 4$) in 21 Abschnitten die Übertragung $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$. Kapitel III ist speziellen Problemen und singulären Fällen gewidmet (10 Abschnitte). Kapitel IV ist „Geometrie der Feldgleichungen" betitelt und enthält in 11 Abschnitten die geometrische Theorie des hier als Problem (1) angeführten Sachverhalts. Die ausführliche Behandlung der hier als Probleme (2) und (3) angeführten Fragen bringt Kapitel V, „Physikalische Deutung der Feldgleichungen". Das letzte Kapitel VI enthält drei Anhänge: (I) „Lichtgeometrie", (II) Vierkomponentige Spinor-algebra und -analysis des einheitlichen Feldes $g_{\lambda\mu}$, (III) Liniengeometrie im dreidimensionalen projektiven Raum. Die „Lichtgeometrie" diskutiert vornehmlich das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in der einheitlichen Feldtheorie in Hinblick auf den *Michelson*-Versuch einerseits und den sogenannten *Miller*-Effekt andererseits. Die Behandlung des Spinorkalküls in Anhang II verwendet in erheblichem Maße die Grundbegriffe der algebraischen Liniengeometrie. Banausen der Liniengeometrie finden alles Nötige zum Verständnis im letzten Anhang.

Druck und Ausstattung sind vorzüglich, wie man von dem verdienten Verlag nicht anders erwarten konnte. Das Erscheinen dieses sehr bedeutsamen Werkes fällt zeitlich zusammen mit Aufsehen erregenden Nachrichten über neue Erfolge einer von *W. Heisenberg* gefundenen quantentheoretischen einheitlichen Feldtheorie. Man möchte der Hoffnung Ausdruck geben, daß uns die Zukunft auch noch einen Brückenschlag vom einheitlichen Tensorfeld (im Sinne von *Einstein-Hlavaty*) zum einheitlichen Spinorfeld (im Sinne von *Heisenberg-Pauli*) bescheren mag, um so mehr, als aufgrund neuer empirischer Tatsachen der sogenannten „Parität" auch *M. v. Laues* Wunsch nach Verstärkung der empirischen Fundamente der Theorie berücksichtigt erscheint. *M. Pinl*, Köln

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG / BERLIN - GÖTTINGEN - HEIDELBERG

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von Professor Dr. **L. Collat**, Hamburg, und Professor Dr. **F. Lösch**, Stuttgart

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Erstes Heft: **Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen.** Von Dr. habil. **H. Bückner**, Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. Gr.-8°. 1952.
Vergriffen

Zweites Heft: **Die konfluente hypergeometrische Funktion** mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von **Herbert Buchholz**, apl. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten. Gr.-8°. 1953. Steif geheftet DM 36.—

Drittes Heft: **Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik.** Von Dr. **Karl-Richard Dorfner**, München. Mit 44 Textabbildungen. VII, 150 Seiten. Gr.-8°. 1957. Steif geheftet DM 26.—

Viertes Heft: **Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen.** Von Dr. **W. Franz**, apl. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster in Westf. Mit 29 Textabbildungen. IV, 129 Seiten. Gr.-8°. 1957.
Steif geheftet DM 21.60

Fünftes Heft: **Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.** Von Dr. **Ekkehart Kröner.** Mit 39 Abbildungen. VII, 179 Seiten. Gr.-8°. 1958.
Steif geheftet DM 32.—

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, M. Kneser, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Zuletzt erschienen:

Reihe: Algebraische Geometrie. Besorgt von **B. Segre.**

Siebzehntes Heft: **Il teorema di Riemann-Roch per curce, superficie e varietà questioni collegate.** Von **F. Severi.** VIII, 131 Seiten. Gr.-8°. 1958.
Steif geheftet DM 23.60

Reihe: Moderne Funktionstheorie. Besorgt von **L. V. Ahlfors.**

Neunzehntes Heft: **Polynomial Expansions of Analytic Functions.** Von **Ralph P. Boas**, jr., and **R. Creighton Buck.** With 16 figures. VIII, 77 pages. Gr.-8°. 1958. Steif geheftet DM 19.80

Reihe: Reelle Funktionen. Besorgt von **P. R. Halmos.**

Einundzwanzigstes Heft: **Normed Linear Spaces.** Von **M. Mahlon Day.** VIII, 139 Seiten. Gr.-8°. 1958. Steif geheftet DM 28.—

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Herausgegeben von
Fritz Regler, Wien, und **Hans Thirring**, Wien
Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

Zuletzt erschien:

Band 12, Heft 1

(Ausgegeben im Mai 1958.) Mit 23 Abbildungen. 120 Seiten. 1958

S 174.—, DM 29.—, sfr. 29.70, $ 6.90

Inhaltsverzeichnis: **Flamm, L.**, *Hans Thirring* zu seinem 70. Geburtstag. — **Sexl, Th.**, und **K. Spielberg**, Zum Stabilitätsproblem der *Poiseuille*-Strömung. — **Rotter, F.**, Einige Anwendungen der vier Leuchtdichtefunktionen des Schwarzen Körpers in der Präzisionsphotometrie. — **Krzywoblocki, M. Z. v.**, On Some Aspects of Diabatic Flow and General Interpretation of the Wave Mechanics Fundamental Equation. — **Banerjee, H.**, Polarisation Effects in Elastic Scattering of *Dirac* Electrons by Screened *Coulomb* Field. — **Hittmair, O.**, Kernreaktionen in direkter Wechselwirkung. — **Székely, A.**, Untersuchung eines ionisierten Gases mittels schwacher elektrischer Wechselfelder. — **Barakat, N.**, Two-Beam High Contrast Interferometry. — Buchbesprechungen.

Astronautica Acta

Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation
Herausgegeben von
W. v. Braun, Huntsville/Ala.; **A. Eula**, Roma; **B. Fraeijs de Veubeke**, Liége; **J. M. J. Kooy**, Breda; **F. I. Ordway III**, Huntsville/Ala.; **E. Sänger**, Stuttgart; **K. Schütte**, München; **L. I. Sedov**, Moskva; **L. R. Shepherd**, Chilton; **J. Stemmer**, Baden / Schweiz
Schriftleitung: **F. Hecht**, Wien

Jährlich erscheinen 4 Hefte. (1958: 4. Jahrgang)

Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, sfr. 37.20, $ 8.60
Einzelheftpreis S 72.—, DM 12.—, sfr. 12.40, $ 2.85

Mitglieder der Internationalen Astronautischen Föderation bzw. deren Mitgliedsgesellschaften erhalten die Zeitschrift zu einem um 20% ermäßigten Bezugspreis

Zuletzt erschien:

Vol. IV / Fasc. 2

Mit 20 Abbildungen. 54 Seiten. 1958

Inhalt — Contents — Sommaire: **Perkins, F. M.**, An Analytical Solution for Flight Time of Satellites in Eccentric and Circular Orbits. — **Vertregt, M.**, Die Bahnbestimmung aus dem Vektor der Bahngeschwindigkeit. — **Winterberg, F.**, Besondere Brennstoffverteilung und Kühlungsprobleme in Reaktoren von Kernraketen. — Buchbesprechung — Book Review — Compte rendu.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung